



Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
y Sistemas de Telecomunicación  
Campus Sur  
Universidad Politécnica de Madrid

Universidad Politécnica de Madrid

# ESTUDIO DE LA DINÁMICA NO LINEAL DE VÓRTICES MAGNÉTICOS EN NANO- DOTS

Máster en Ingeniería de Sistemas y Servicios  
Accesibles para la Sociedad de la Información



POLITÉCNICA

*Ingeniamos el futuro*

Juan Alfonso Valero Lancho

21/06/2015

Tutor: D. Rafael Hernández Heredero





## Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres toda la ayuda recibida a lo largo de tantos años de formación, sabiendo que es un momento tan importante para ellos como para mí.

Mención especial a Rosa, mi compañera y apoyo incondicional, que ha sido mi aliento y mi guía cada vez que ha sido necesario. También para mi hermano Abel, que siempre está ahí, por su ayuda.

Finalmente, me gustaría agradecer a D. Rafael Hernández Heredero, tutor del TFM, su rigor científico, formal y estético en la supervisión de este trabajo.

Juan Alfonso Valero Lancho

*Sevilla, 2015*



# Índice

Agradecimientos	ii
Índice	iv
Índice de figuras	vii
Índice de tablas	xii
Índice de ecuaciones	xiii
Resumen	xvi
Summary	xvii
1 Introducción	1
1.1. Introducción	2
1.2. Introducción a los sistemas dinámicos	5
1.2.1 Definiciones básicas	7
1.2.2 Sistemas dinámicos lineales	8
1.2.3 Teoría de bifurcaciones.	9
1.2.4 Clasificación de sistemas planos lineales.	10
1.2.5 Sistemas planos no lineales y caos.	17
1.2.6 Algunos conceptos adicionales.	18
1.3. Introducción a los vórtices magnéticos.	20
1.3.1 Dinámica de los vórtices magnéticos.	25
1.3.1 Aplicaciones de los vórtices magnéticos.	30
2 Desarrollo del proyecto	33

2.1. Dinámica de un vórtice en un <i>dot</i> magnético	34
2.2. El sistema dinámico	36
2.3. El límite lineal	39
2.4. Estudio analítico del sistema	41
2.5. Estudio de los radios de las órbitas de equilibrio	50
2.5.1. Representación de la variación de las raíces del polinomio para $\beta$ positiva	51
2.5.1.1. Resultados para $\beta = 4\omega_0$ variando $\omega$	53
2.5.1.2. Resultados para $\beta = 4\omega_0$ variando $h_0$	58
2.5.2. Representación la variación de las raíces del polinomio para $\beta$ negativa	61
2.5.2.1. Resultados para $\beta = -4\omega_0$ variando $\omega$	63
2.5.2.2. Resultados para $\beta = -4\omega_0$ variando $h_0$	68
2.6. El plano de fase del sistema	72
2.6.1 Diagrama de fase y ceroclinas para $\beta = 4\omega_0$	74
2.6.2 Diagramas de fase para $\beta = -4\omega_0$	79
3 Resumen y conclusiones	94
4 Código fuente y bibliografía	97
4.1. Módulos de código MATLAB desarrollados.	98
4.1.1. mySystem.m	98
4.1.2. ode_solver.m	99
4.1.3. fft_calculation.m	100



4.1.4. roots_calculation_vary_w.m	101
4.1.5. roots_calculation_vary_ho.m	102
4.1.6. ho_intervals.m	103
4.2. Referencias bibliográficas	105

## Índice de figuras

Figura 1. Algunas nano estructuras litografiadas con un patrón geométrico [1].	
3	
Figura 2. Configuraciones magnéticas en nanoestructuras litografiadas.	3
Figura 3. Dominios ferromagnéticos en un monocristal de Ni [2].	4
Figura 4. Diagrama de fases de un punto de silla bidimensional [13].	11
Figura 5. Diagrama de fases de un sumidero bidimensional.	12
Figura 6. Diagrama de fases de una fuente bidimensional.	12
Figura 7. Diagrama de fases de un centro bidimensional.	13
Figura 8. Diagrama de fases de una fuente en espiral (izquierda) y un sumidero en espiral (derecha) bidimensionales para autovalores idénticos.	14
Figura 9. Diagrama de fases de un sumidero bidimensional para autovalores idénticos.	14
Figura 10. Distintos diagramas de fase para posibles valores de los autovalores [7].	15
Figura 11. Diagrama de fases en espiral bidimensional.	16
Figura 12. Clasificación de soluciones en función del plano traza-determinante [12].	17
Figura 13. Ceroclinas (a) y regiones delimitadas (b) para el sistema (18).	20
Figura 14. Tipos de ordenaciones de espín electrónico que dan lugar a una imanación espontánea [25].	21
Figura 15. Dominios magnéticos en un material ferromagnético [28].	22
Figura 16. Dominios magnéticos y paredes de Bloch en un material ferromagnético [28].	23



Figura 17. Pared de dominios. (a) Pared de Néel: el vector de imanación ha de ser intra-plano. (b) Pared de Bloch: el vector de imanación puede ser exterior al plano. 23

Figura 18. Vórtice magnético. (a) Vórtice magnético en la intersección de dos paredes de Néel. (b) Vórtice magnético. 23

Figura 19. Esquemático de un vórtice magnético. En puntos más alejados del núcleo del vórtice, la imanación gira continuamente alrededor del centro con la misma orientación que la superficie plana. En el centro del núcleo la imanación es perpendicular al plano (elemento resaltado en la figura). 24

Figura 20. Los cuatro estados generados. (a), (b) quiralidad a la derecha. (c), (d) quiralidad a la izquierda. (a), (d) polaridad positiva. (b), (c) polaridad negativa. 25

Figura 21. (a) Inversión de la imanación en los campos aplicados  $H_{ip}$  para nanodiscos de diámetro 340, 440 y 530 nm, respectivamente. La disminución del campo aplicado desde la saturación lleva primero a una desviación de la dirección de imanación en la dirección del campo aplicado, para una mitad de la estructura. La inversión del campo desplaza el centro del vórtice hacia el borde del disco donde es aniquilado por los valores más altos del campo aplicado. (b) Dibujo esquemático de los vórtices en estado remanente y bajo el campo magnético aplicado. (c) Valores de los campos de saturación y nucleación  $H_{SIP}$  y  $H_{NIP}$ , respectivamente, como función del diámetro del disco  $d$ . El campo de nucleación  $H_{NIP}$  representa el valor del campo  $H_{IP}$  donde se empiezan a observar las primeras variaciones de contraste [18]. 27

Figura 22. Interpretación del movimiento del núcleo del vórtice. 27

Figura 23. (a) Estructura del espín (flechas blancas) de un vórtice cuadrado orientado a izquierdas (lado izquierdo) y a derechas (lado derecho). Las flechas azules representan el torque precedente generado por el campo magnético externo (flecha morada). Las manos ilustran la orientación del vórtice y la flecha verde la imanación fuera de plano de la imanación del núcleo. Las flechas rojas representan la dirección de la aceleración en respuesta al campo. (b), (c) vórtices orientados a izquierdas y a derechas, respectivamente durante y tras la aplicación de un pulso de campo. 28

Figura 24. Nanopilares con vórtices magnéticos para generar una señal oscilatoria. 30

Figura 25. (a) Configuración de la medida y geometría empleada para determinar la resistencia del dispositivo. (b) Resistencia medida en un dispositivo multi-capa de  $0.3 \mu\text{m}$  de diámetro con 10 muestras. 32

Figura 26. Plano de fases para  $h_0=0$ ,  $\omega=0$  y  $\beta$  negativa ( $\beta=-4\omega_0$ ). 41

Figura 27. Representación de las inecuaciones (41) y resonancia a campo externo débil para  $\beta$  positiva ( $\beta=4\omega_0$ ). 46

Figura 28. Representación de las inecuaciones (42) y resonancia a campo externo débil para  $\beta$  negativa ( $\beta=-4\omega_0$ ). 47

Figura 29. Intervalos delimitados por (41) con  $\beta=4\omega_0$  y valores  $\omega=1.04\omega_0$ ,  $\omega=1.2\omega_0$  y  $\omega=1.4\omega_0$ . 52

Figura 30. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $\omega=1.4\omega_0$ . 53

Figura 31. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $\omega=1.2\omega_0$ . 55

Figura 32. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $\omega=1.04\omega_0$ . 56

Figura 33. Intervalos delimitados por (41) con  $\beta = 4\omega_0$  y valores  $h_0=0.002\omega_0$ ,  $h_0=0.012\omega_0$  y  $h_0=0.03\omega_0$ . 57

Figura 34. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $h_0=0.002\omega_0$ . 58

Figura 35. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $h_0=0.012\omega_0$ . 59

Figura 36. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $h_0=0.03\omega_0$ . 60

Figura 37. Intervalos delimitados por (42) con  $\beta=-4\omega_0$  y valores  $\omega=0.05\omega_0$ ,  $\omega=0.5\omega_0$ ,  $\omega=0.9\omega_0$  y  $\omega=0.96\omega_0$ . 62

Figura 38. Variación de las soluciones con  $\beta=-4\omega_0$  y  $\omega=0.96\omega_0$ . 63

Figura 39. Variación de las soluciones con  $\beta=-4\omega_0$  y  $\omega=0.9\omega_0$ . 64

Figura 40. Variación de las soluciones con  $\beta=-4\omega_0$  y  $\omega=0.5\omega_0$ . 65

Figura 41. Variación de las soluciones con $\beta=-4\omega_0$ y $\omega=0.05\omega_0$ .	66
Figura 42. Intervalos delimitados por (42) con $\beta=-4\omega_0$ y valores $h_0=0.002\omega_0$ , $h_0=0.005\omega_0$ y $h_0=0.02\omega_0$ .	67
Figura 43. Variación de las soluciones con $\beta=-4\omega_0$ y $h_0=0.002\omega_0$ .	68
Figura 44. Detalle Figura 43 en torno al origen para las dos ramas de soluciones superiores.	69
Figura 45. Variación de las soluciones con $\beta=-4\omega_0$ y $h_0=0.005\omega_0$ .	70
Figura 46. Variación de las soluciones con $\beta=-4\omega_0$ y $h_0=0.02\omega_0$ .	71
Figura 47. Diagrama de fases del sistema con $\beta=4\omega_0$ y $\omega=1.04\omega_0$ .	74
Figura 48. Ceroclinas del sistema con $\beta=4\omega_0$ y $\omega=1.04\omega_0$ .	75
Figura 49. Diagrama de fases del sistema con $\beta=4\omega_0$ y $\omega=1.2\omega_0$ .	76
Figura 50. Ceroclinas del sistema con $\beta=4\omega_0$ y $\omega=1.2\omega_0$ .	77
Figura 51. Diagrama de fases del sistema con $\beta=4\omega_0$ y $\omega=1.4\omega_0$ .	78
Figura 52. Ceroclinas del sistema con $\beta=4\omega_0$ y $\omega=1.4\omega_0$ .	79
Figura 53. Intervalos y valores estudiados para $\beta=-4\omega_0$ .	80
Figura 54. Diagrama de fases del sistema con $\beta=-4\omega_0$ , $h_0=0.002\omega_0$ y $\omega=0.05\omega_0$ .	81
Figura 55. Detalle del atractor de radio pequeño con $\beta=-4\omega_0$ , $h_0=0.002\omega_0$ y $\omega=0.05\omega_0$ .	82
Figura 56. Ejemplo de órbita periódica (en rojo) con $\beta=-4\omega_0$ , $h_0=0.002\omega_0$ y $\omega=0.14\omega_0$ .	83
Figura 57. Diagrama de fases del sistema con $\beta=-4\omega_0$ , $h_0=0.002\omega_0$ y $\omega=0.5\omega_0$ .	84

Figura 58. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.002\omega_0$  y  $\omega=0.9\omega_0$ . 85

Figura 59. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.005\omega_0$  y  $\omega=0.05\omega_0$ . 86

Figura 60. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.005\omega_0$  y  $\omega=0.5\omega_0$ . 87

Figura 61. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.005\omega_0$  y  $\omega=0.9\omega_0$ . 88

Figura 62. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.02\omega_0$  y  $\omega=0.05\omega_0$ . 89

Figura 63. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.02\omega_0$  y  $\omega=0.5\omega_0$ . 90

Figura 64. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.02\omega_0$  y  $\omega=0.9\omega_0$ . 91

Figura 65. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.002\omega_0$  y  $\omega=0.102145\omega_0$ . 92

Figura 66. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.02\omega_0$  y  $\omega=0.53\omega_0$ . 93

Figura 67. Módulos MATLAB desarrollados. 98



## Índice de tablas

Tabla. I. Parámetros del sistema de ecuaciones.

38

## Índice de ecuaciones

- (1) Ecuación diferencial de movimiento.
- (2) Ecuación de un sistema en forma implícita.
- (3) Ecuación de un flujo.
- (4) Posible solución del flujo.
- (5) Ecuación exponencial de un flujo.
- (6) Sistema dinámico bidimensional en notación matricial.
- (7) Matriz de un sistema bidimensional con autovalores reales.
- (8) Matriz de un sistema bidimensional con autovalores complejos.
- (9) Matriz de un sistema bidimensional con autovalores complejos. Caso general.
- (10) Traza de una matriz bidimensional.
- (11) Determinante de una matriz bidimensional.
- (12) Polinomio característico de una matriz bidimensional en función de la traza y el determinante.
- (13) Autovalores en función de la traza y el determinante de un sistema bidimensional.
- (14) Jacobiana de la matriz  $F$  en el punto  $X(t)$ .
- (15) Ecuación variacional.
- (16) Sistema dinámico en notación matricial.
- (17) Ejemplo de sistema dinámico bidimensional.
- (18) Sistema dinámico anterior en notación matricial.
- (19) Ecuación de movimiento del núcleo del vórtice.

- (20) Frecuencia de resonancia de la oscilación del núcleo del vórtice.
- (21) Frecuencia de resonancia de la oscilación del núcleo del vórtice. Forma alternativa.
- (22) Proporcionalidad de la frecuencia de resonancia de la oscilación del núcleo del vórtice.
- (23) Ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert del movimiento del campo clásico de imanación.
- (24) Ecuación de Thiele de movimiento de un vórtice.
- (25) Vector complejo de movimiento del núcleo del vórtice.
- (26) Vector velocidad.
- (27) Sistema dinámico de ecuaciones no lineales del apartado III de [4].
- (28) Ecuación número uno del SED no lineales del apartado III de [4] en forma equivalente.
- (29) Ecuación número dos del SED no lineales del apartado III de [4] en forma equivalente.
- (30) Módulo al cuadrado del vector velocidad.
- (31) Solución temporal del sistema lineal.
- (32) Condición de puntos estacionarios del sistema.
- (33) Ecuación en función del coseno de  $\phi$ .
- (34) Ecuación en función del seno de  $\phi$ .
- (35) Ecuación de  $(h_0)^2$  para los puntos estacionarios.
- (36) Ecuación de  $(h_0)^2$  para los puntos estacionarios en forma alternativa.
- (37) Ecuación polinómica del sistema para obtener sus puntos estacionarios.
- (38) Parámetros del polinomio (37).

- (39) Discriminante del polinomio (37).
- (40) Primera condición para la existencia de bifurcaciones.
- (41) Inecuación que determina los equilibrios para  $\beta$  positiva.
- (42) Inecuación que determina los equilibrios para  $\beta$  negativa.
- (43) Desigualdad para  $\beta$  positiva.
- (44) Desigualdad para  $\beta$  negativa.
- (45) Ecuación de la frecuencia de resonancia en forma implícita.



## Resumen

En el presente trabajo se ha realizado un estudio sobre el comportamiento dinámico de vórtices magnéticos en su aplicación en osciladores de espín-torque. A partir de los modelos matemáticos elaborados en [4] sobre estos osciladores de espín-torque, se han simulado y estudiado usando MATLAB, entre otras herramientas, para tratar de verificar su concordancia con el comportamiento físico observado en el laboratorio. Es importante señalar que el estudio tiene en cuenta la dinámica no lineal, esencial para describir correctamente un sistema oscilante en la práctica.

El análisis matemático del sistema que describe la órbita del núcleo de un vórtice magnético sometido a la acción de un campo magnético externo oscilatorio, muestra la posibilidad de la existencia de hasta tres soluciones especiales, según la geometría del *dot* y el valor del campo magnético de excitación, tanto de su frecuencia como de su amplitud. Estas soluciones corresponden a estados estacionarios del vórtice caracterizados como una órbita circular, aunque en el caso de existir tres equilibrios uno de ellos es inestable.

El modelo matemático ha sido estudiado y analizado para reproducir los resultados obtenidos en [4] y adicionalmente se ha implementado el caso de la energía potencial del vórtice con el término no lineal distinto de [4] (con una constante  $\beta$  negativa). Los resultados obtenidos bajo esta suposición muestran una cierta disparidad respecto al caso de  $\beta$  positiva y reflejan la existencia de comportamientos muy diferentes. En la dinámica del vórtice bajo la suposición de  $\beta$  negativa también surgen bifurcaciones de pliegue (*fold-over*) en la trayectoria del núcleo del vórtice: siempre se obtienen tres equilibrios a bajas frecuencias y aparecen a veces dos intervalos con tres equilibrios en lugar de uno solo, a diferencia del caso de  $\beta$  positiva. El comportamiento del núcleo del vórtice sigue un proceso de histéresis en ambos casos, cuando se dan ciertas condiciones.

## Summary

This work is a study about the dynamic behaviour of magnetic vortex in its application in spin-torque oscillators. Starting from mathematical models developed in [4] on this subject, a further analysis has been performed using MATLAB to simulate the behaviour of vortex-based spin-torque oscillators as different relevant parameters vary. The main aim of the study is to check if the obtained results can explain the observed physical behaviour, and an important observation is that fully nonlinear effects are taken into consideration.

The mathematical analysis of the system that describes the orbit of the vortex core under the influence of an external oscillatory magnetic field shows that there are up to three possible special solutions depending on the dot geometry and the magnetic driving field value, both on its amplitude as well as its frequency. These solutions correspond to a stable circular orbit of the vortex core, but when the system has three solutions one of them is unstable.

This mathematical model has been analyzed and studied to reproduce the results obtained in [4] and, additionally, the effect of a negative value of the nonlinear part of the vortex potential (constant  $\beta$ ). Results derived from this assumption exhibit certain differences with respect to the case of a positive constant ( $\beta$ ) and reflect the existence of very different patterns. Vortex dynamics under the supposition of a negative  $\beta$  also yield fold-over bifurcations in the trajectory of the vortex core: there are always three solutions at low frequencies and there may be two different intervals with three solutions as opposed to the case of positive  $\beta$ . The vortex core follows a hysteresis process in both cases, when certain conditions are met.

# 1

## Introducción

## 1.1. Introducción

En el presente trabajo se han estudiado analítica y numéricamente ciertos aspectos de la dinámica de los vórtices magnéticos como sistema dinámico no lineal. Los vórtices magnéticos son un fenómeno encuadrado en el nanomagnetismo, que investiga los fenómenos magnéticos que se producen a escala nanoscópica, dado que el tamaño de estos vórtices es del orden de unos pocos cientos de nanómetros.

El estudio se ha abordado a través de un modelo que identifica nuestro dispositivo como un sistema dinámico bidimensional, haciendo hincapié en los aspectos cualitativos del mismo y en los distintos parámetros que caracterizan su comportamiento. Estos sistemas permiten caracterizar multitud de fenómenos físicos, entre ellos algunos pertenecientes al nanomagnetismo, como los vórtices magnéticos.

El tratamiento cualitativo de los sistemas dinámicos ofrece una potente herramienta de análisis que complementa y refuerza las simulaciones micromagnéticas y las observaciones y mediciones experimentales para la caracterización y comprensión de algunos aspectos del nanomagnetismo.

Los vórtices magnéticos son un objeto observado experimentalmente hace unos años y cuyas aplicaciones están creciendo enormemente. Por ello, constituyen un candente tema de estudio en la actualidad, debido a sus aplicaciones como sistemas de transmisión a frecuencias de *Terahertzios* o para la construcción de sistemas de almacenamiento de gran capacidad. Por ejemplo, se pueden conseguir antenas, mediante la litografía de nanopilares de capas magnéticas separados por una capa de cobre extremadamente delgada. El estado magnético de estos nanopilares es de vórtices que se hacen oscilar al unísono produciendo una potente señal. Estas antenas pueden integrarse en ordenadores o teléfonos móviles de última generación.

El desarrollo de nanotecnología ha llevado a la aparición de materiales con nanoestructuras que siguen un patrón geométrico determinado, de tamaño nanoscópico. En la siguiente figura podemos observar algunas nanoestructuras de uso corriente.

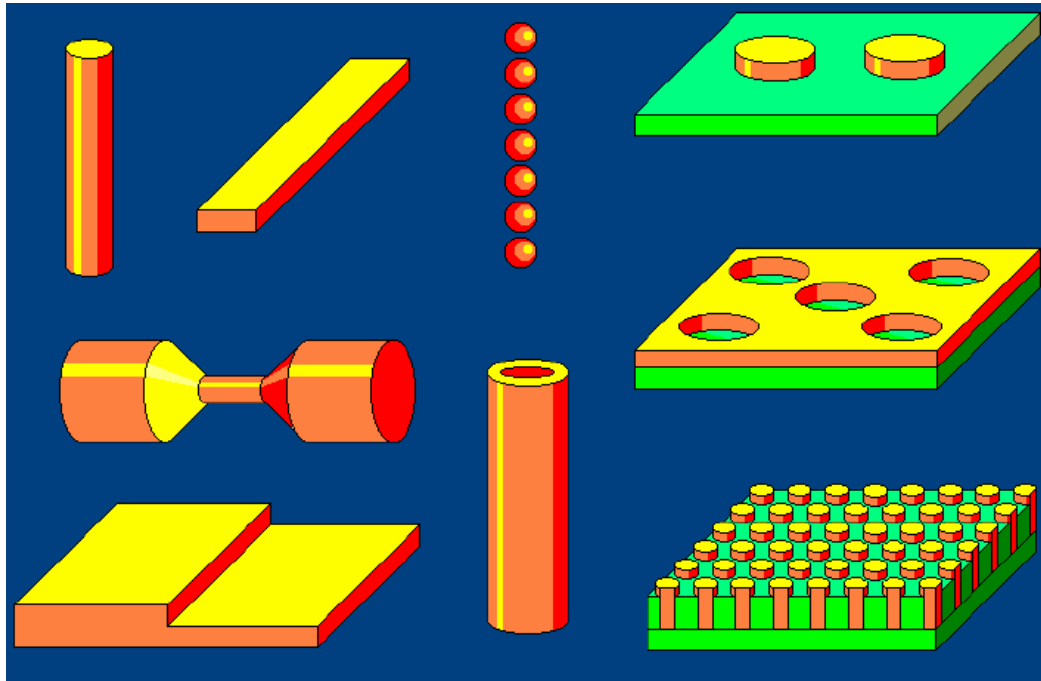


Figura 1. Algunas nano estructuras litografiadas con un patrón geométrico [1].

En estas nanoestructuras se establecen distintos tipos de configuraciones magnéticas en función del campo aplicado y de la geometría de las mismas, existiendo distintos efectos debidos: al tamaño de la estructura, a su relación de aspecto y a su forma.

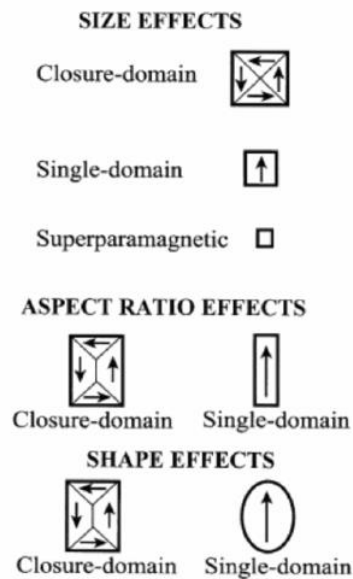


Figura 2. Configuraciones magnéticas en nanoestructuras litografiadas.

En la figura 2 vemos algunas de las configuraciones nanomagnéticas que se generan en función de los tres parámetros mencionados. Principalmente, se distinguen las configuraciones de dominios de cierre y de dominio único. La configuración de tipo vórtice aparece en el centro del estado con dominios de cierre. Las nanopartículas muy pequeñas están en el estado super-paramagnético [2], es decir su imanación es inestable frente a la temperatura.

Los materiales ferromagnéticos macroscópicos están compuestos por un gran número de pequeñas regiones o dominios magnéticos, en cuyo interior la imanación local está saturada. La muestra puede ser imanada mediante la aplicación de un campo exterior, para alcanzar la saturación. Esto ocurre tanto en monocristales como en muestras policristalinas.

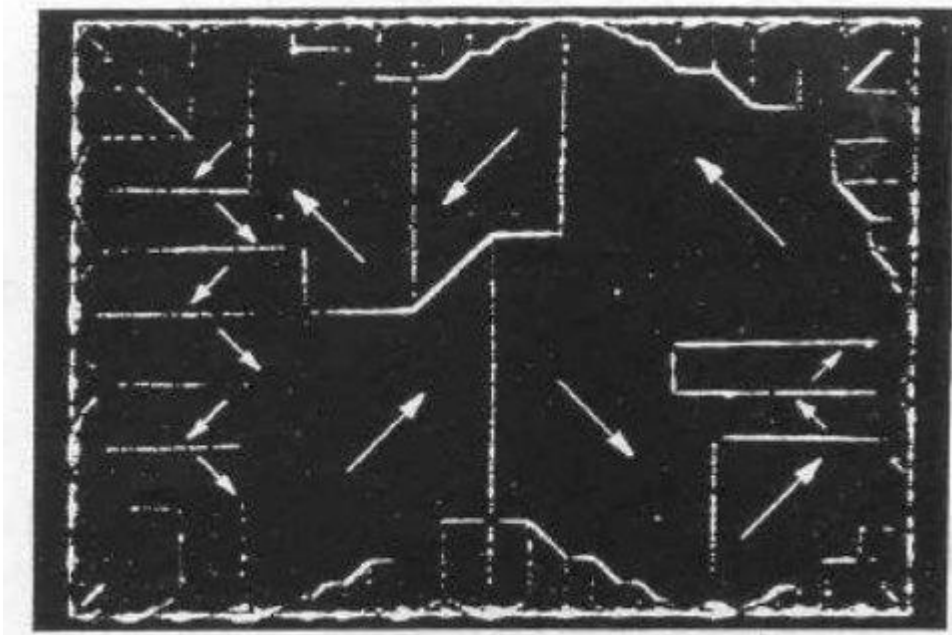


Figura 3. Dominios ferromagnéticos en un monocristal de Ni [2].

El estudio se ha centrado en nanoestructuras que presentan estados de tipo vórtice. Desde el punto de vista de tiempo, consideramos los regímenes transitorios y cuasi-estacionarios del orden de los nanosegundos, que se dan en la dinámica no lineal de vórtices en *dots* magnéticos, alimentados externamente por un campo oscilatorio.

Se parte del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que describen la variación de fase y posición del núcleo del vórtice, suponiendo que la fuente principal

de no-linealidad proviene de la energía magnetostática y se demuestra la aparición de bifurcaciones (ver 1.2.3) en régimen estacionario.

También se llega a la conclusión de que en régimen transitorio la dinámica no-lineal del núcleo del vórtice describe una trayectoria de radio oscilante, como se verá en el apartado de resultados. Los estados dinámicos resultantes contienen múltiples frecuencias con amplitud decreciente en el tiempo. Se establecen, asimismo, los rangos de frecuencia que conducen a la inestabilidad del núcleo del vórtice de forma que se produzca una inversión de la polaridad del mismo.

En primer lugar se hará una introducción tanto a los sistemas dinámicos, como a los aspectos físicos involucrados en los vórtices magnéticos. Posteriormente, en el apartado 2, se presentan los resultados obtenidos y su interpretación. Para finalizar, en el apartado 4 se muestra y explica el código fuente implementado.

## **1.2. Introducción a los sistemas dinámicos**

Vamos a repasar algunos conceptos sobre los sistemas dinámicos. Un sistema dinámico es un concepto matemático en el que un conjunto de reglas describen la dependencia temporal de ciertas variables, llamadas variables de estado, en función del valor que tienen en cada momento y de posibles factores dependientes del tiempo. Según Kuznetsov (1.995) [7], es la representación matemática de un proceso determinista.

Otra definición de sistema dinámico [9] sería “un espacio de estados o de fases abstracto, cuyas coordenadas describen el estado en cualquier instante, y existe una regla dinámica que especifica el valor futuro inmediato de todas las variables de estado a partir del valor actual de las mismas. Matemáticamente se describe como un problema de valor inicial”.

Según [10], un sistema dinámico puede ser virtualmente cualquier cosa que evolucione con el tiempo. Consta de dos partes: un vector de estado que describe exactamente el estado de un sistema real o hipotético y una función (es decir, una regla) que indica, para el estado actual, cuál será el estado en el siguiente instante de tiempo.

Cuando se conocen tanto la ley que gobierna su evolución como su estado inicial, es posible predecir los estados futuros del sistema. El conjunto de valores que pueden tomar las variables de estado se denomina espacio de estados

$$X = \{x : x \text{ es un estado del sistema dinámico}\}$$

Este “espacio de estados” o espacio de fases del sistema se considera un objeto fundamental de todo sistema dinámico. La posición en este espacio  $X$  para cada instante caracteriza el estado del sistema. Ejemplos de este espacio pueden ser  $\mathbb{R}^n$  o una variedad finito-dimensional, un espacio funcional, un espacio de medidas, etc

La evolución de los sistemas dinámicos viene regida por ecuaciones diferenciales que pueden ser ordinarias (EDO), en derivadas parciales (EDP), con retardo o memoria (EDR), sistemas discretos, etc. También existe la posibilidad de incluir el efecto de algunos términos estocásticos. A pesar de ello, la teoría de los sistemas dinámicos posee sus rasgos diferenciadores en el enfoque respecto a lo que clásicamente se engloba en la teoría de ecuaciones diferenciales.

Muy frecuentemente es imposible obtener fórmulas explícitas de las soluciones de dichas ecuaciones. Por ello Poincaré, considerado como el padre de la teoría de los sistemas dinámicos, propuso un análisis cualitativo que considera la totalidad de las soluciones, en lugar de un subconjunto de las mismas, y que se centra en describir propiedades cualitativas de las mismas.

El concepto de sistema dinámico tiene sus orígenes en la mecánica newtoniana (Mecánica Celeste y Mecánica Analítica) y actualmente ha extendido su influencia a otros dominios. Para la determinación de los estados futuros se requiere la resolución o integración de una ley evolutiva que define el sistema. Cuando el sistema es resoluble, es posible determinar todas las posiciones futuras a partir de un punto inicial dado, obteniendo lo que se conoce como trayectoria u órbita del sistema dinámico.

Como ejemplo de sistema dinámico podríamos citar los modelos matemáticos que describen el balanceo de un péndulo de reloj, un circuito eléctrico, el flujo de agua en una tubería o el número de embriones de peces nacidos en un lago cada primavera. Como vemos engloba a sistemas pertenecientes a distintas disciplinas.

El sistema dinámico está definido por un conjunto de valores reales dados, para cualquier instante temporal, cuya representación se refleja en cada punto del espacio de estados. La ecuación que representa la evolución del sistema dinámico (la ley evolutiva) es una regla fija que describe los estados futuros posibles a partir del actual. Esta regla es determinista, de forma que para un intervalo de tiempo sólo existe un posible estado que sigue al actual.



Con anterioridad al uso masivo de los procesadores de alta velocidad, la resolución de los sistemas dinámicos requería sofisticadas técnicas matemáticas y sólo era posible para un pequeño conjunto de sistemas dinámicos. El uso de métodos numéricos implementados sobre computadores ha simplificado enormemente la tarea de determinar las órbitas o trayectorias del sistema. Para sistemas dinámicos simples, conocer la trayectoria es a menudo suficiente, pero no así para la mayoría de los sistemas dinámicos, en los que suele ser muy complicada la comprensión en términos de las trayectorias individuales.

### 1.2.1 Definiciones básicas

Según [8], un sistema dinámico es un espacio topológico o geométrico  $M$ , llamado espacio de fases (o estados) dotado de una familia de funciones diferenciables  $\phi^t$ , para todo  $t \in T$ , que asocian un punto del espacio de fases a otro punto del mismo en cada instante. El concepto de diferenciabilidad puede variar según las aplicaciones o el tipo de espacio geométrico. Existen diversas opciones para el conjunto  $T$ . Si  $T$  pertenece al conjunto de los números reales, se llama flujo al sistema dinámico. Si  $T$  se restringe al conjunto de reales no-negativos, entonces el sistema dinámico es un semi-flujo. Si  $T$  pertenece al conjunto de los números enteros, se habla de mapa o cascada y en caso de restringirlo a enteros no-negativos se habla de semi-cascada.

La función de evolución  $\phi^t$  es a menudo la solución de una ecuación diferencial de movimiento:

$$\dot{x} = v(x) \tag{1}$$

La ecuación da la derivada con el tiempo (representada por el punto sobre la  $x$ ), de una trayectoria  $x(t)$  en el plano de fases, comenzando en algún punto  $x_0$ . El campo vectorial  $v(x)$  es una función derivable que, para todos los puntos del espacio de fases  $M$ , da el valor del vector velocidad del sistema dinámico para cada punto (estos vectores no pertenecen al espacio de fases  $M$  sino al espacio tangente  $T_x M$  del punto  $x$ ). Dada una función derivable  $\phi^t$ , puede derivarse un campo de vectores autónomo a partir de él.

No es necesaria la diferenciabilidad en órdenes superiores en la ecuación, ni para la dependencia temporal de  $v(x)$ , porque pueden eliminarse considerando sistemas con más dimensiones. También pueden usarse otros tipos de ecuaciones diferenciales para describir la regla de evolución:

$$G(x, \dot{x}) = 0 \quad (2)$$

Este es un ejemplo típico de ecuación que surge al modelar sistemas mecánicos con restricciones complejas. Se conoce como forma implícita.

Como hemos comentado, las ecuaciones diferenciales que determinan la función de evolución  $\phi^t$  son frecuentemente ecuaciones diferenciales ordinarias: en este caso el espacio de fases  $M$  es un espacio geométrico de dimensión finita. Muchos de los conceptos de los sistemas dinámicos pueden extenderse a espacios geométricos de dimensión infinita, en cuyo caso las ecuaciones diferenciales son en derivadas parciales.

Nosotros estudiaremos un sistema dinámico definido en  $\mathbf{R}^2$ , es decir, un caso particular de sistema dinámico definido en  $\mathbf{R}^n$ . Seguiremos como referencia básica a [12], según la cual un sistema dinámico suave en  $\mathbf{R}^n$  es una función continua y diferenciable  $\Phi: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  denominada flujo, que denotando  $\Phi(t, X) = \Phi_t(X)$  satisface:

1.  $\Phi_0: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es la función identidad:  $\Phi_0(X_0) = X_0$ .
2. Ley de composición:  $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ , para todo  $t, s \in \mathbf{R}$ .

El concepto de diferenciabilidad es una extensión al cálculo multivariable del concepto de derivabilidad de las funciones de una variable real. Recordemos que una condición suficiente para que una función sea diferenciable es que todas sus derivadas parciales existan y sean continuas en todo su dominio. Una función tal se denomina función de clase  $C^1$ , o función continuamente diferenciable. Si la función es continuamente diferenciable  $k$  veces, se denota como  $C^k$ . Según la definición anterior, el mapa  $\Phi_t: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  es  $C^1$  para cada  $t$  y tiene inversa  $\Phi_{-t}$  también  $C^1$ .

### 1.2.2 Sistemas dinámicos lineales

Los sistemas dinámicos lineales pueden resolverse con funciones simples y el comportamiento de todas sus órbitas puede ser clasificado fácilmente. En un sistema lineal el espacio de fases es un espacio euclídeo  $N$ -dimensional, de forma que cada punto puede representarse como un vector de  $N$  números. El análisis de los sistemas lineales es posible porque cumplen el principio de superposición: si  $u(t)$  y  $w(t)$  satisfacen la ecuación diferencial para el campo vectorial (aunque no necesariamente la condición inicial), entonces también la satisface  $u(t) + w(t)$ .

Un sistema dinámico lineal es aquel cuyo campo vectorial  $v(x)$  es función lineal de la posición en el espacio de fases, es decir:

$$v(x) = Ax + b \quad (3)$$

Siendo  $A$  una matriz,  $b$  un vector y  $x$  el vector de posición. La solución a este sistema se puede calcular a través del principio de superposición (linealidad). En el caso de  $b \neq 0$  y  $A=0$  el flujo  $\Phi_t(X)$  es una línea recta en la dirección de  $b$ :

$$F_t(x_1) = x_1 + bt \quad (4)$$

Cuando  $b$  es cero y  $A \neq 0$ , el origen es un equilibrio o punto singular del flujo, es decir, si  $x_0=0$  entonces la órbita permanece en dicho punto. Para otras condiciones iniciales, la ecuación de movimiento viene dada por la exponencial de la matriz, para un punto inicial  $x_0$ :

$$F_t(x_0) = e^{tA} x_0 \quad (5)$$

Cuando  $b=0$ , los autovalores de  $A$  determinan la estructura del espacio de fases. A partir de los autovalores y autovectores de  $A$  es posible determinar si un punto inicial converge o diverge al punto de equilibrio desde el origen.

La distancia entre dos condiciones iniciales distintas en caso de que  $A \neq 0$  cambia exponencialmente en la mayoría de casos, bien convergiendo de forma exponencial hacia un punto o bien divergiendo de forma exponencial. Para los sistemas no-lineales esta es condición necesaria pero no suficiente para que se den las condiciones de comportamiento caótico.

### 1.2.3 Teoría de bifurcaciones.

Cuando el flujo  $\Phi_t$  (o el campo vectorial correspondiente) depende de un parámetro  $\mu$ , la estructura del espacio de fases dependerá también de este parámetro. Puede ocurrir que las variaciones del parámetro lleven a cambios cualitativos en el espacio de fases hasta que se alcanza un cierto valor  $\mu_0$ . A este punto en el que el espacio de fases cambia cualitativamente de comportamiento se le llama bifurcación.

La teoría de bifurcaciones considera una estructura en el espacio de fases (normalmente un punto fijo, una órbita periódica o un toro invariante) y estudia su comportamiento en función del parámetro  $\mu$ . En la bifurcación, la estructura puede cambiar su estabilidad, dividirse en nuevas estructuras o fusionarse con otras

estructuras. Es posible clasificar los distintos tipos de bifurcaciones en los sistemas dinámicos mediante el uso de series de Taylor para aproximar los mapas y entendiendo las diferencias que pueden ser eliminadas con un cambio de coordenadas.

Las bifurcaciones de un punto fijo  $x_0$  de una familia de sistemas  $v_\mu$  pueden caracterizarse mediante los autovalores de la primera derivada del sistema  $Dv_\mu(x_0)$  evaluada sobre el punto donde se produce la bifurcación. Se producen en los valores de  $\mu$  para los que el punto fijo pierde la propiedad de hiperbolicidad, es decir, cuando algún autovalor tiene parte real nula.

El estudio de las bifurcaciones es de la mayor importancia pues permite comprender el comportamiento dinámico de los sistemas y caracterizarlo en función del valor de estos parámetros. Kuznetsov [7] habla de que las bifurcaciones se producen cuando el sistema cambia de comportamiento, es decir el diagrama de fases del sistema será topológicamente equivalente hasta un cierto valor crítico del parámetro  $\mu$ , para el que se produce la bifurcación, es decir, el diagrama de fases resultante ya no es topológicamente equivalente al anterior.

#### 1.2.4 Clasificación de sistemas planos lineales.

Para el caso de estudio que abordamos es de especial interés la clasificación de soluciones de sistemas planos de dos dimensiones. Recordamos brevemente el concepto de autovalor: se define como aquel valor  $\lambda$  para el que se cumple  $AV_0 = \lambda V_0$ , siendo  $A$  una matriz real y  $V_0$  un vector no nulo que se denomina autovector.

En [12] se deduce cómo podemos establecer una clasificación, dependiente del valor de los dos autovalores asociados a un sistema plano. Partimos de un sistema lineal de dos dimensiones  $X' = AX$ , o en forma matricial:

$$X' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X \quad (6)$$

Suponemos que  $A$  tiene dos autovalores reales  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  no nulos. Entonces la matriz  $A$  sería semejante a la forma diagonal, es decir, existe una matriz invertible  $T$  tal que:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Pueden darse 3 casos

1)  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ .

En este caso, se obtiene como diagrama de soluciones un punto de silla, siendo el punto de equilibrio el origen.

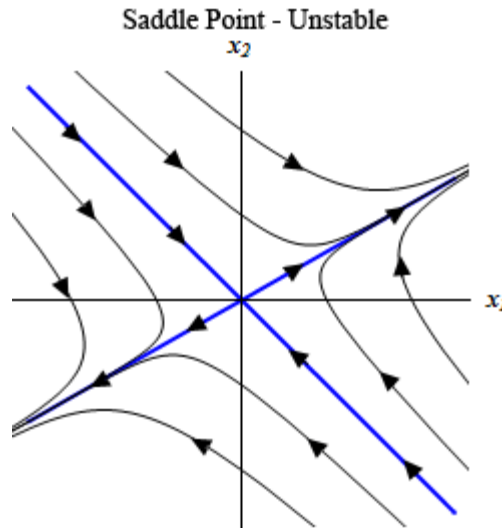


Figura 4. Diagrama de fases de un punto de silla bidimensional [13].

El equilibrio del origen es inestable, ya que una pequeña perturbación puede alejar infinitamente la solución del equilibrio.

2)  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

En este caso, se obtiene como el diagrama de soluciones corresponde al de un equilibrio en el origen que denominamos sumidero. Además, dado que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  se dice que  $\lambda_1$  es el autovalor fuerte y  $\lambda_2$  el autovalor débil. Las soluciones tienden a “abrazar” al eje correspondiente al autovalor más débil al acercarse al origen.

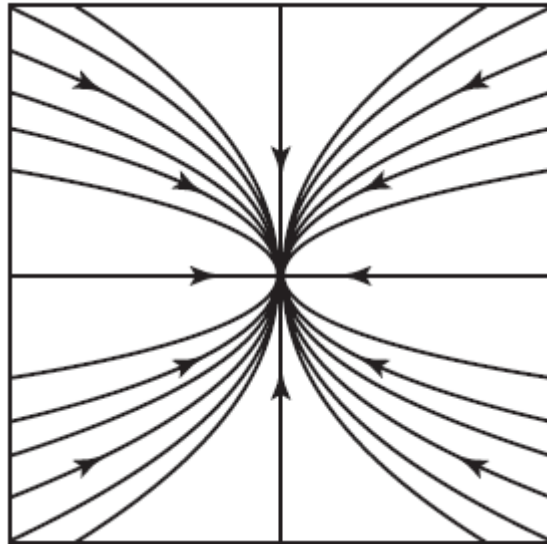


Figura 5. Diagrama de fases de un sumidero bidimensional.

Este tipo de equilibrio es estable, ya que cualquier perturbación del estado de equilibrio retorna a él, puesto que todas las trayectorias convergen hacia el sumidero a medida que  $t$  aumenta.

$$3) \ 0 < \lambda_2 < \lambda_1.$$

En este caso, se obtiene el diagrama de soluciones correspondiente a una fuente en el origen. Además, de nuevo  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  con lo que  $\lambda_1$  es el autovalor fuerte y  $\lambda_2$  el autovalor débil. El diagrama de fase es análogo al anterior pero en este caso las soluciones tienden a alejarse del origen.

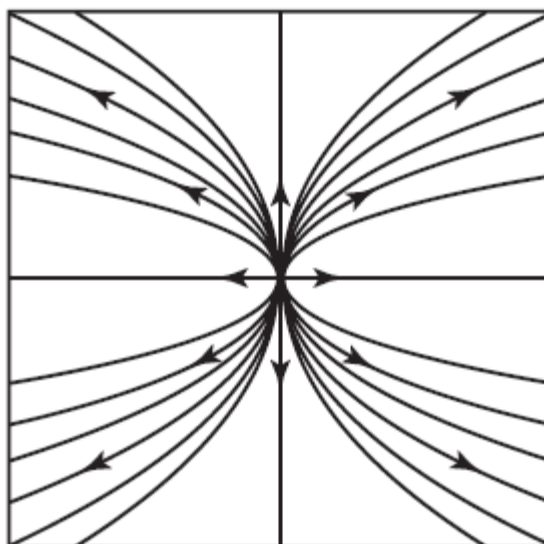


Figura 6. Diagrama de fases de una fuente bidimensional.

Una fuente es inestable, ya que al divergir hacia el infinito todas las trayectorias cercanas a la fuente a medida que  $t$  aumenta, cualquier perturbación del estado de equilibrio lo destruirá.

Suponemos a continuación que los autovalores son complejos: si consideramos un número real  $\beta$  y  $X'=AX$ , entonces la matriz es semejante a

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (8)$$

La matriz  $A$  tiene dos autovalores complejos de valor  $\pm i\beta$  y el punto de equilibrio, siempre en el origen de coordenadas, se denomina centro. La figura resultante consta de trayectorias concéntricas circulares en torno al origen.

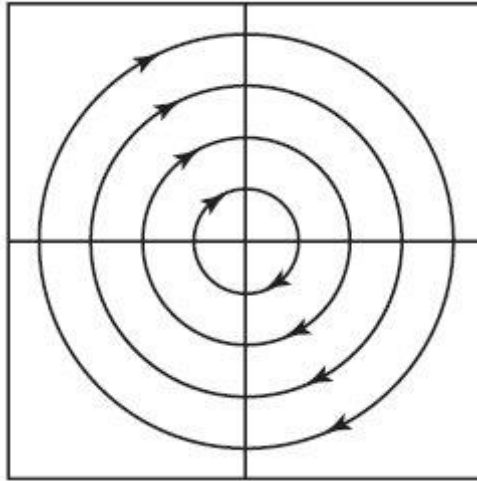


Figura 7. Diagrama de fases de un centro bidimensional.

En función del valor de  $\beta$ , el giro se produce en el sentido de las agujas del reloj, si  $\beta$  es positivo y en el contrario si  $\beta$  es negativo.

El caso de autovalores complejos más general es aquel en el que la matriz es semejante a:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (9)$$

Ahora los diagramas de fase resultantes corresponden a que el origen sea una fuente en espiral o sumidero en espiral, siendo el primer caso inestable y el segundo estable.

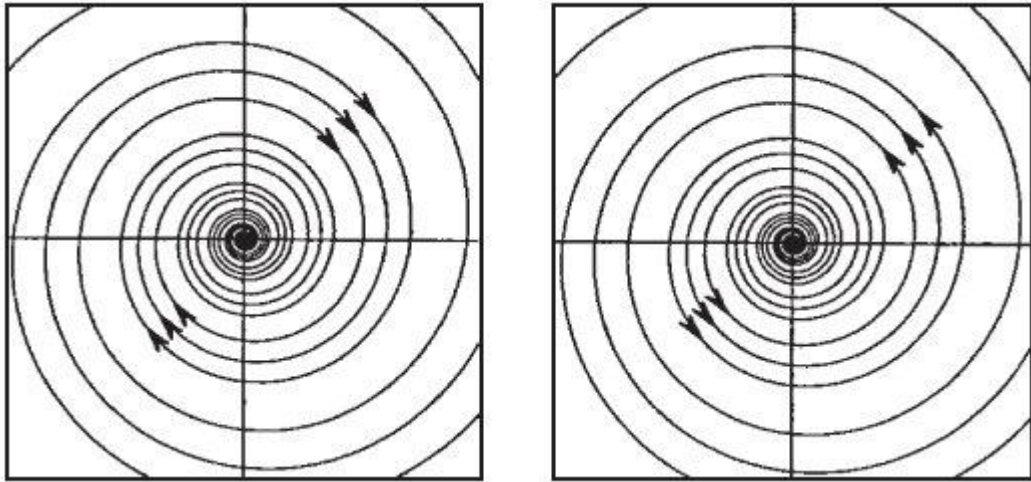


Figura 8. Diagrama de fases de una fuente en espiral (izquierda) y un sumidero en espiral (derecha) bidimensionales para autovalores idénticos.

Como vemos, el caso del sumidero en espiral es análogo, pero las flechas irían dirigidas hacia el origen de coordenadas, donde se encuentra el punto de equilibrio.

Un caso muy particular se da cuando existen autovalores reales repetidos, es decir  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Los diagramas resultantes en este caso también son fuentes (cuando  $\lambda$  es positivo) o sumideros (cuando  $\lambda$  es negativo), pero con la particularidad de que hay sólo una dirección característica, de salida en el caso de fuentes y de entrada en el de sumideros.

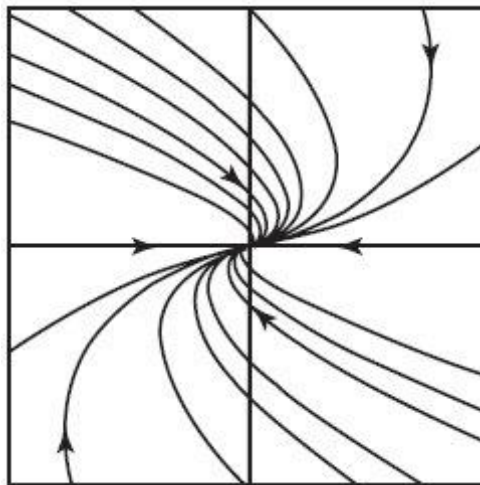


Figura 9. Diagrama de fases de un sumidero bidimensional para autovalores idénticos.



Estas soluciones engloban la práctica totalidad de los casos de soluciones en diagramas bidimensionales, ya que casi todas las matrices pueden reducirse a alguna de las formas anteriores mediante la transformación a su forma canónica.

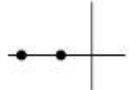
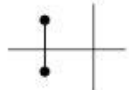
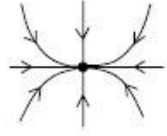

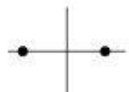
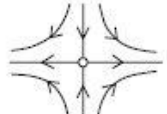

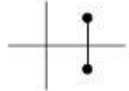


Eigenvalues	Phase portrait	Stability
 	 node  focus	stable
	 saddle	unstable
 	 node  focus	unstable

Figura 10. Distintos diagramas de fase para posibles valores de los autovalores [7].

Los diagramas mostrados anteriormente corresponden a los casos canónicos, es decir, sistemas con matrices (7) (9) a las que  $A$  es semejante. Cuando se deshace la semejanza, el diagrama no cambia cualitativamente, pero las direcciones características sí. Por ejemplo, las dos entradas o salidas de una fuente o sumidero no están necesariamente en los ejes, y un centro no es circular, sino elíptico, como se ve en la Figura 11.

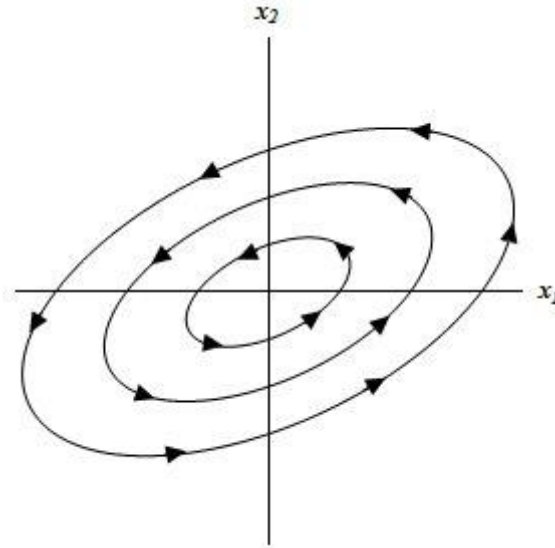


Figura 11. Diagrama de fases en espiral bidimensional.

Además, es posible establecer una clasificación de todos los sistemas (ver capítulo 4 de [12]), en función de valor de la traza y el determinante de su matriz  $A$ . Recordamos ambos conceptos. Dado un sistema  $\dot{X}=AX$ , con la matriz  $A$  como la definida en (6), la traza ( $\text{tr } A$ ) y el determinante ( $\det A$ ) valen:

$$\text{tr } A = a + d \quad (10)$$

$$\det A = ad - bc \quad (11)$$

Entonces el polinomio característico puede expresarse como:

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A = 0 \quad (12)$$

Y los autovalores resultantes serían:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\text{tr } A \pm \sqrt{(\text{tr } A)^2 - 4 \det A}) \quad (13)$$

Esta clasificación permite obtener la siguiente figura:

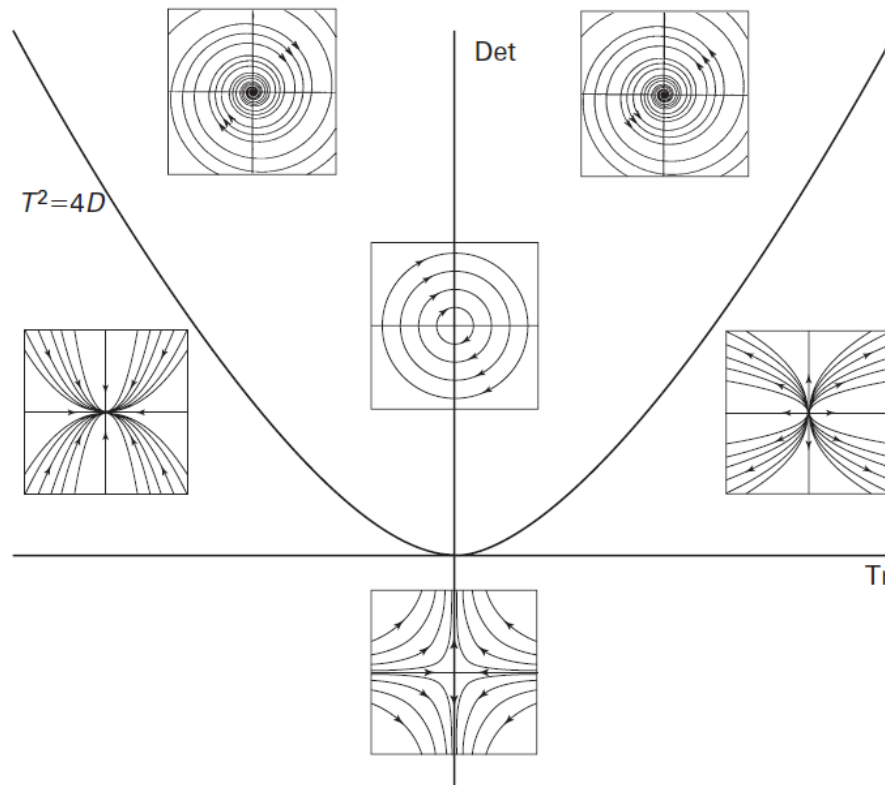


Figura 12. Clasificación de soluciones en función del plano traza-determinante [12].

#### 1.2.5 Sistemas planos no lineales y caos.

Los sistemas dinámicos simples e incluso los sistemas lineales definidos por intervalos pueden exhibir un comportamiento totalmente impredecible, que aparentemente puede parecer aleatorio. Esto puede parecer contradictorio, pues estos sistemas son deterministas. A este comportamiento aparentemente impredecible se le llama caos.

Esta rama de las matemáticas trata del comportamiento cualitativo a largo plazo de los sistemas dinámicos. El objetivo no es encontrar las soluciones precisas de las ecuaciones que definen el sistema dinámico (que a veces resulta inviable), sino responder a preguntas tales como: ¿cuándo alcanzará el sistema un estado estable a largo plazo, y en dicho caso cuáles son los posibles atractores? o ¿depende el comportamiento a largo plazo del sistema de la condición inicial?.

En este caso, no siempre es posible hallar analíticamente soluciones explícitas del sistema, dado un determinado problema de valor inicial. Puede darse el caso de que no existan soluciones o bien que sean infinitas, también.

También pueden producirse enormes variaciones en la respuesta del sistema frente a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales, lo que lleva a hablar de teoría del caos (ver [14], por ejemplo).

Es interesante destacar que el estudio de estos sistemas puede abordarse mediante un proceso de linealización, estudiando la variación local en el entorno de los puntos de equilibrio mediante la linealización del sistema en torno a los mismos [12]:

Dado un sistema  $X'=F(x)$ , si llamamos  $X(t)$  a una solución particular del sistema definida en el intervalo  $J=[\alpha, \beta]$ . Para un  $t_0 \in J$  fijo, tal que  $X(t_0)=X_0$ , si para cada  $t \in J$

$$A(t)=DF_{X(t)} \quad (14)$$

Donde  $DF$  denota el jacobiano de la matriz  $F$  en el punto  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Entonces, se conoce como la ecuación variacional respecto a la solución inicial  $a$ :

$$U'=A(t)U \quad (15)$$

Si  $U(t)$  es una solución de la ecuación variacional que satisface  $U(t_0)=U_0$ , entonces la función  $t \rightarrow X(t)+U(t)$  es una buena aproximación a la solución  $Y(t)$  de la ecuación autónoma con valor inicial  $Y(t_0)=X(t_0)+U(t_0)$ , suponiendo que  $U(t_0)$  es suficientemente pequeño. Se interpreta  $U(t)$  como la pequeña “variación” que sufre la solución  $X(t)$  cuando cambia ligeramente la condición inicial  $X(t_0)$  y pasa a ser  $X(t_0)+U(t_0)$ .

#### 1.2.6 Algunos conceptos adicionales.

Dado un sistema dinámico, representado por  $X'=F(t,X)$ , donde

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Se definen los siguientes conceptos:

- Punto de equilibrio: dado el sistema dinámico representado por  $X'(t)=F(t,X(t))$ , siendo  $X'(t)=(x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ ,

$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  sería la solución del sistema, suponiendo que esta exista. Un vector  $X_0$  para el que  $F(X_0)=0$  se llama punto de equilibrio del sistema y corresponde a una solución constante  $X(t)=X_0$  del sistema anterior.

- Sistema autónomo: si en el sistema anterior, ninguna de las funciones  $f_j$  depende de  $t$ , de forma que puede expresarse  $X'=F(X)$ , se le llama sistema autónomo.
- Diagrama de fase: consiste en la representación gráfica de un conjunto de curvas que son solución del sistema. Se suelen añadir flechas para indicar el sentido en el que las mismas evolucionan.
- Ceroclinas ("nullclines"): dado un sistema como el definido en (16), se conocen como ceroclinas de  $x_j$  al conjunto de puntos en que se anula  $x_j'$ , es decir  $f_j(t, x_1, \dots, x_n)=0$ . Las ceroclinas dividen el espacio  $R^n$  en un conjunto de regiones en que las componentes  $x_j$  del campo apuntan en dirección positiva o negativa. Son de gran utilidad pues permiten dividir el espacio  $R^n$  en regiones en las que el campo tiene una determinada dirección.

Ilustramos este concepto a través de un ejemplo, dada su importancia. Podríamos tener el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned}x' &= y - x^2 \\ y' &= x - 2\end{aligned}\tag{17}$$

Este sistema tiene una x-ceroclina en  $y=x^2$  y una y-ceroclina en  $x=2$ . Como las ceroclinas sólo coinciden en (2,4), este es el único punto de equilibrio del sistema. Además las ceroclinas delimitan 4 regiones del plano  $R^2$ , en las que el vector de campo tiene diferente dirección. Normalmente es suficiente determinar la dirección en un punto de cada una de estas regiones para conocerlo en cada una de ellas.

Este sistema en notación matricial es:

$$X' = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X\tag{18}$$

Podemos ver a continuación las ceroclinas y las regiones que delimitan con las diferentes direcciones del vector de campo.

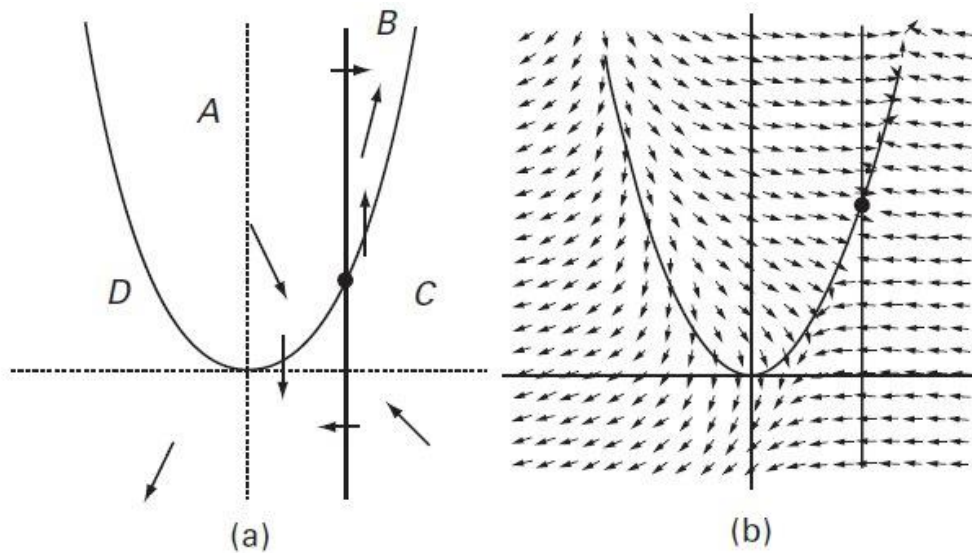


Figura 13. Ceroclinas (a) y regiones delimitadas (b) para el sistema (18).

Observamos en la figura (a) que sobre las ceroclinas el vector de campo tiene la dirección de uno de los dos ejes (norte/sur o este/oeste) y en cada una de las regiones puede apuntar al sudoeste, sureste, noreste o noroeste.

### 1.3. Introducción a los vórtices magnéticos.

Vamos a realizar una breve introducción respecto a los aspectos físicos involucrados en el presente trabajo.

El ordenamiento a nivel microscópico de los espines de los electrones, característico de los materiales ferromagnéticos, conduce a la formación de regiones de alineamiento magnético, llamadas dominios. Este comportamiento se observa en materiales ferromagnéticos y ferrimagnéticos, que presentan una imanación espontánea  $M_s$  en ausencia de campo magnético, por debajo de una temperatura dada  $T_C$ , llamada temperatura de Curie ferromagnética. Esto los diferencia de los materiales paramagnéticos, en los que es necesaria la excitación de un campo magnético para que exhiban momento magnético.

Debido a estos dominios ya hay un alto grado de imanación en los materiales ferromagnéticos, dentro de los dominios individuales, pero en ausencia de campos magnéticos externos, esos dominios están orientados de forma aleatoria. Simplemente aplicando un modesto campo magnético, puede originarse un mayor grado de

alineamiento de los momentos magnéticos con el campo externo, dando una gran multiplicación del campo resultante [21].

En la figura siguiente vemos los tipos de ordenaciones de momentos magnéticos que dan lugar a una imanación espontánea:

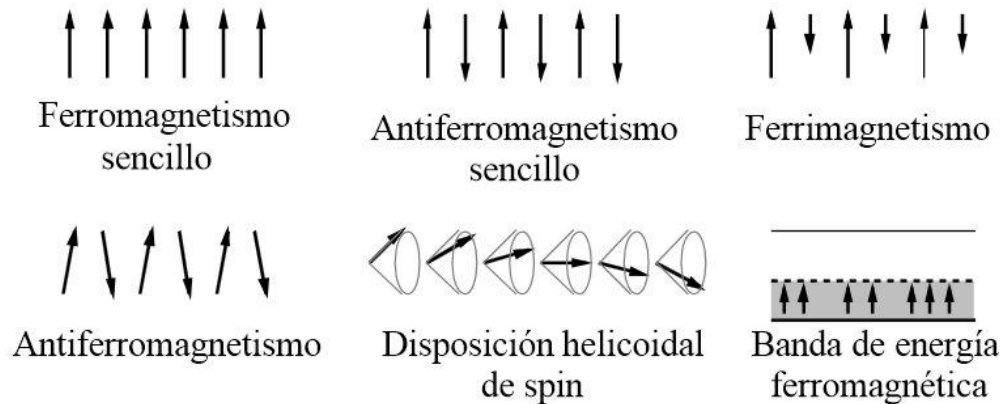


Figura 14. Tipos de ordenaciones de espín electrónico que dan lugar a una imanación espontánea [25].

Como hemos visto, en los materiales ferromagnéticos se forman dominios magnéticos para minimizar la energía interna. Puede decirse que su existencia se debe a una razón termodinámica. Si bien la energía dentro del dominio se hace mínima con los momentos alineados, ha de tenerse en cuenta asimismo la energía magnetostática del material, que es la energía potencial producida por la imanación del material. Esta energía magnetostática es la que se minimiza con la formación de los dominios magnéticos, que cierran el flujo magnético y lo confinan dentro del material.

Los dominios magnéticos son, pues, pequeñas regiones de volumen del material en las cuales se cumple que todos los momentos magnéticos se encuentran alineados en la misma dirección. En piezas no magnetizadas, los dominios se orientan al azar, de forma que sus efectos se anulan mutuamente y no existe imanación neta medible en el exterior.

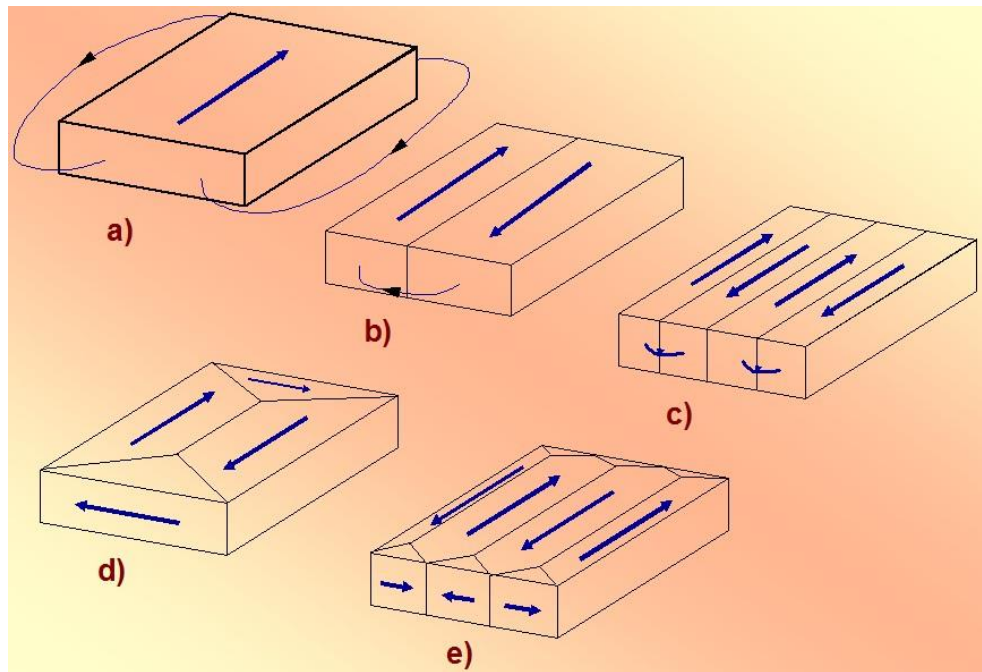


Figura 15. Dominios magnéticos en un material ferromagnético [28].

Los dominios, están separados por un borde o pared del dominio, conocidas como paredes de Bloch o paredes de Néel. Por razones termodinámicas, la orientación de los momentos magnéticos locales cambia no de forma súbita, sino gradualmente entre la que presenta un dominio y el adyacente. Por ello, la anchura de las paredes de Bloch puede ser del orden de unos 300 átomos, y al no haber un alineamiento perfecto, la pared tiene siempre una mayor energía interna que el interior del dominio.

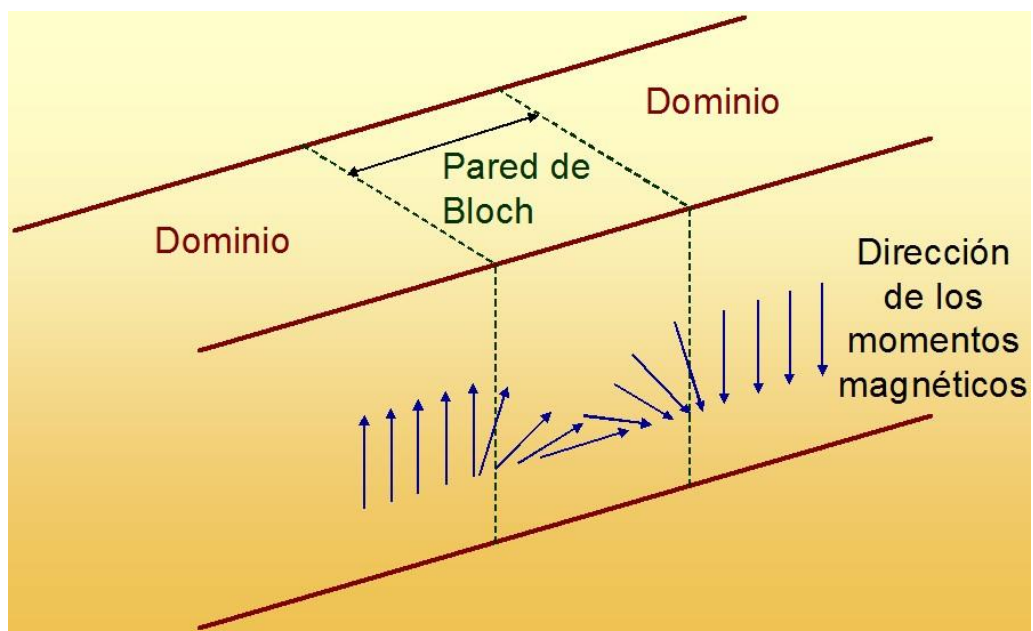




Figura 16. Dominios magnéticos y paredes de Bloch en un material ferromagnético [28].

Entonces, se forma una pared entre dos dominios que tengan diferentes direcciones de imanación, de forma natural. Normalmente, hay dos tipos de paredes entre dominios magnéticos: pared de Bloch [19] y pared de Neél [20].

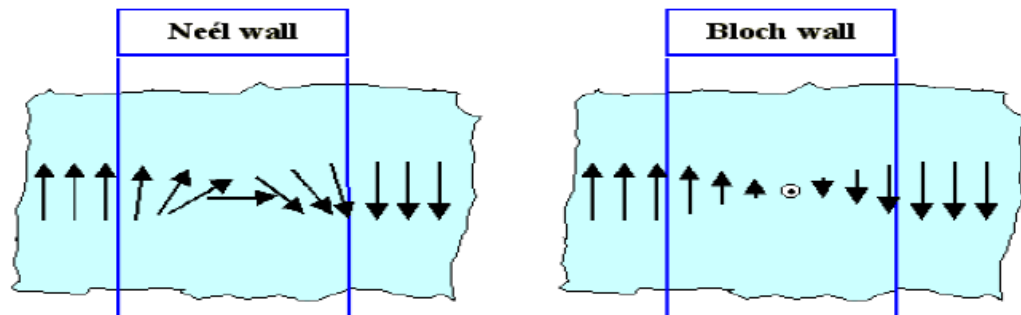


Figura 17. Pared de dominios. (a) Pared de Neél: el vector de imanación ha de ser intra-plano. (b) Pared de Bloch: el vector de imanación puede ser exterior al plano.

La pared de Bloch se convierte en una pared de Neél si el grosor de la muestra es pequeño, especialmente en el caso de películas ferromagnéticas. También se da un fenómeno interesante cuando dos paredes de Neél se cruzan entre sí: surge un vórtice magnético de la intersección de las paredes de Neél.

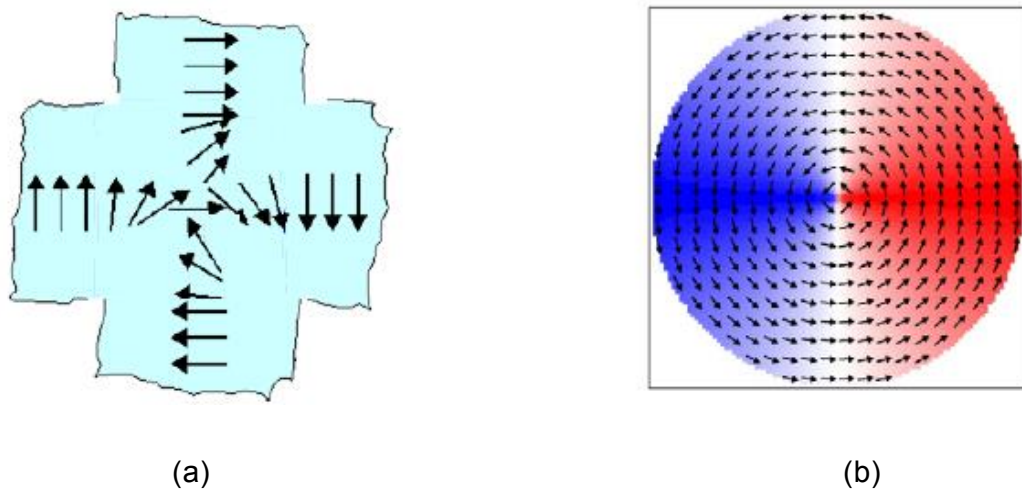


Figura 18. Vórtice magnético. (a) Vórtice magnético en la intersección de dos paredes de Neél. (b) Vórtice magnético.

Obviamente, el cruce de dos paredes magnéticas no es la única forma de generar un vórtice magnético, también existen en *dots* circulares de materiales ferromagnéticos, cuando el grosor del *dot* es mucho menor que su diámetro. En los *dots*, que son elementos planos litografiados con un cierto patrón a escala nanoscópica y mesoscópica, hechos de materiales magnéticos blandos, aparecen con frecuencia configuraciones de vórtices de imanación con alto grado de no-uniformidad en equilibrio. Un vórtice magnético consiste en una distribución de imanación intraplano con flujo cerrado y un núcleo central muy pequeño que se magnetiza en dirección perpendicular al plano que lo contiene. Esta propiedad única de los vórtices magnéticos posibilita muchas aplicaciones interesantes. Una de ellas es el almacenamiento de datos. En esta estructura la particular configuración de imanación previene la interferencia entre vórtices adyacentes, consiguiendo así una alta estabilidad magnética.

Además, aparecen fenómenos interesantes en el centro del vórtice.

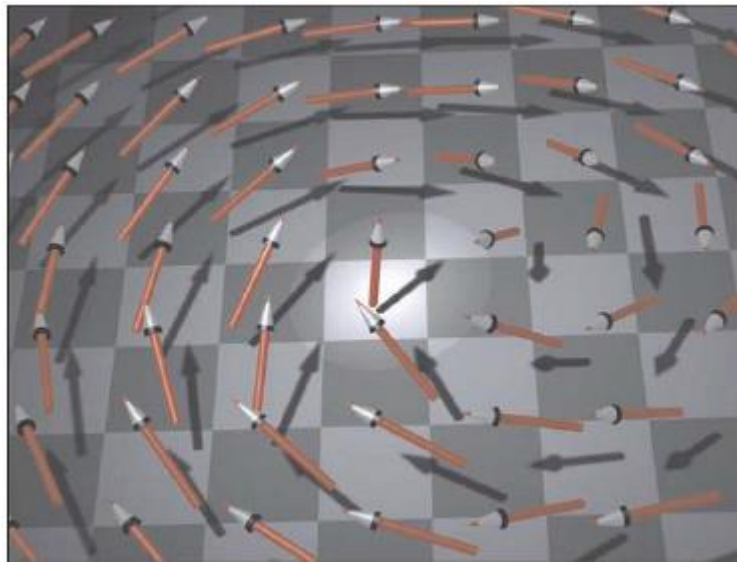


Figura 19. Esquemático de un vórtice magnético. En puntos más alejados del núcleo del vórtice, la imanación gira continuamente alrededor del centro con la misma orientación que la superficie plana. En el centro del núcleo la imanación es perpendicular al plano (elemento resaltado en la figura).

Fuera del núcleo la dirección de giro está contenida en el plano, sin embargo en el núcleo la dirección del espín sobresale y queda fuera del plano.

Aunque la estructura del núcleo del vórtice magnético fue predicha teóricamente desde hace tiempo, la observación experimental ha sido realizada en los

últimos años. Debido al auge de la nanotecnología, se pueden preparar muestras a escala nanoscópica. Uno de los experimentos, en los que se dio una de las primeras observaciones del núcleo de un vórtice magnético, fue con los *dots* circulares de *permalloy* (aleación magnética compuesta de níquel y hierro), que pudo fabricarse con la ayuda de la nanotecnología [22]. A través de microscopía de túnel de espín polarizado puede verse que el radio del núcleo es de unos 10 nm.

Se observa que el estado base del *dot* circular es degenerado. La parte exterior al núcleo puede tener una configuración de giro en sentido horario o anti-horario (se denomina la quiralidad del vórtice), mientras que el núcleo puede tener imanación hacia arriba o hacia abajo (lo que se conoce como su polaridad). Las posibles combinaciones generan cuatro estados básicos distintos, que son energéticamente equivalentes:

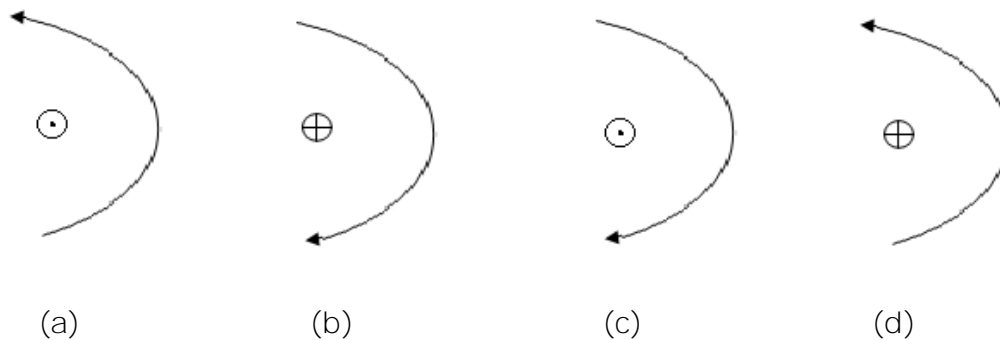


Figura 20. Los cuatro estados generados. (a), (b) quiralidad a la derecha. (c), (d) quiralidad a la izquierda. (a), (d) polaridad positiva. (b), (c) polaridad negativa.

### 1.3.1 Dinámica de los vórtices magnéticos.

La dinámica de imanación rápida en elementos magnéticos litografiados geométricamente en escalas inferiores a micras está atrayendo gran interés y es especialmente relevante para los futuros avances del nano-magnetismo y la espintrónica. El estudio de los modos normales de excitación de espín en estos sistemas proporciona información valiosa para relacionar la respuesta dinámica del nano-elemento con los parámetros geométricos y magnéticos en los circuitos espintrónicos que operan en el rango de frecuencias de los Gigahercios. También es de especial relevancia el problema de la dinámica de inversión de la imanación en nano-estructuras litografiadas.

Debido a que el núcleo del vórtice magnético en movimiento experimenta una fuerza topológica (giro-fuerza) perpendicular a su velocidad, los vórtices magnéticos confinados por una cierta geometría muestran excitaciones dinámicas únicas. Una de ellas corresponde a un movimiento girotrópico en forma de espiral alrededor de una posición de equilibrio con una frecuencia de resonancia del orden de varios cientos de megahercios.

La polaridad del núcleo del vórtice a través del giro-vector, determina la dirección del movimiento de la espiral, como se demostró a través de diversos experimentos.

El perfil del vórtice en movimiento se distorsiona respecto al vórtice estático, debido a la interacción del modo girotrópico con las ondas de espín acimutales. Esta distorsión aumenta a medida que lo hace la velocidad del núcleo, incluso llegando a poder ocasionar la inversión de la polaridad del núcleo. También se sabe que la polaridad del núcleo del vórtice puede invertirse con la aplicación de un campo magnético alterno con la frecuencia de resonancia del vórtice y una amplitud considerablemente inferior que la del campo de conmutación de inversión estática del vórtice. Este efecto ha sido observado experimentalmente y confirmado mediante simulaciones micro-magnéticas. Incluso ya se ha establecido un criterio universal para la conmutación del núcleo del vórtice en función de su velocidad crítica.

Las pruebas experimentales ya evidenciaron la existencia de vórtices magnéticos y los núcleos del vórtice. Veamos a continuación las propiedades dinámicas del núcleo. Si consideramos en primer lugar la situación en que se aplica un campo magnético intra-plano, i.e. la dirección del campo magnético externo es paralela al plano de los *dots*. En un experimento realizado por Schneider en el 2.000 [24] se obtuvo:

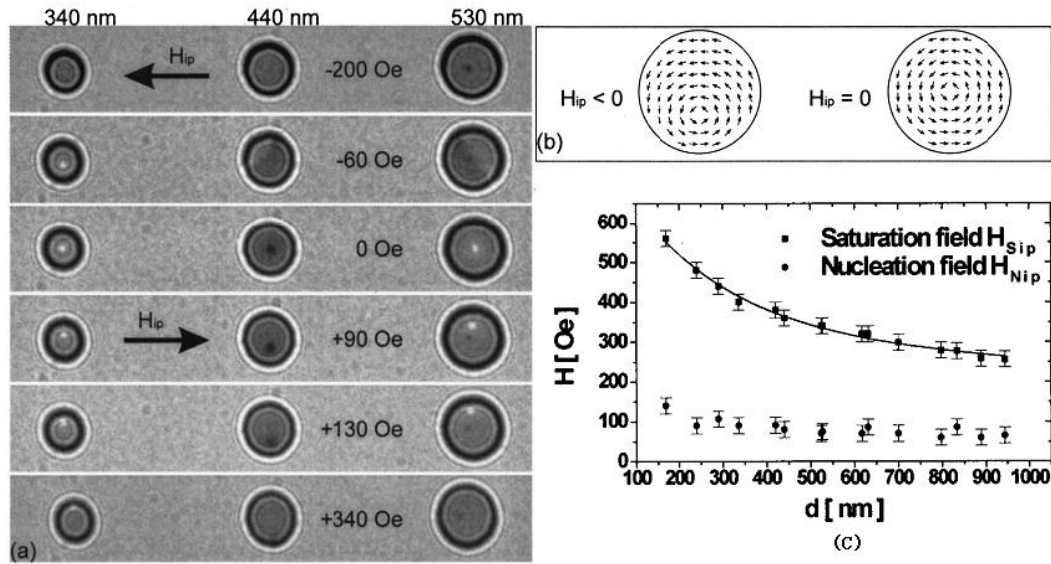


Figura 21. (a) Inversión de la imanación en los campos aplicados  $H_{ip}$  para nanodiscos de diámetro 340, 440 y 530 nm, respectivamente. La disminución del campo aplicado desde la saturación lleva primero a una desviación de la dirección de imanación en la dirección del campo aplicado, para una mitad de la estructura. La inversión del campo desplaza el centro del vórtice hacia el borde del disco donde es aniquilado por los valores más altos del campo aplicado. (b) Dibujo esquemático de los vórtices en estado remanente y bajo el campo magnético aplicado. (c) Valores de los campos de saturación y nucleación  $H_{SIP}$  y  $H_{NIP}$ , respectivamente, como función del diámetro del disco  $d$ . El campo de nucleación  $H_{NIP}$  representa el valor del campo  $H_{ip}$  donde se empiezan a observar las primeras variaciones de contraste [18].

En general, este experimento prueba que cuando se aplica un campo magnético intra-plano el núcleo del vórtice se mueve perpendicularmente a la dirección del campo hacia el borde del disco donde es aniquilado. Se puede dar una interpretación intuitiva sobre el movimiento del núcleo del vórtice bajo un campo magnético intra-plano.

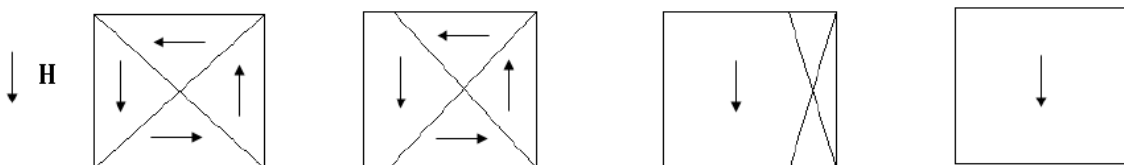


Figura 22. Interpretación del movimiento del núcleo del vórtice.

Aquí, los cuatro dominios magnéticos representan el vórtice, representando el vértice común el núcleo del vórtice. Cuando se aplica un campo magnético externo, el dominio cuya imanación está alineada con el campo externo crece, de forma que el vértice común (núcleo del vórtice) se mueve perpendicularmente a la dirección del campo hasta que finalmente desaparece.

Sin embargo este argumento tan intuitivo no funciona cuando se aplica un pulso magnético intra-plano, como se demostró experimentalmente. Este movimiento del núcleo del vórtice no se observó en el experimento de Shinjo [22], aunque se aplicó un campo relativamente alto en dirección intra-plano. Observaron un movimiento inicial en la dirección del campo durante los breves sub-nanosegundos de duración del pulso.

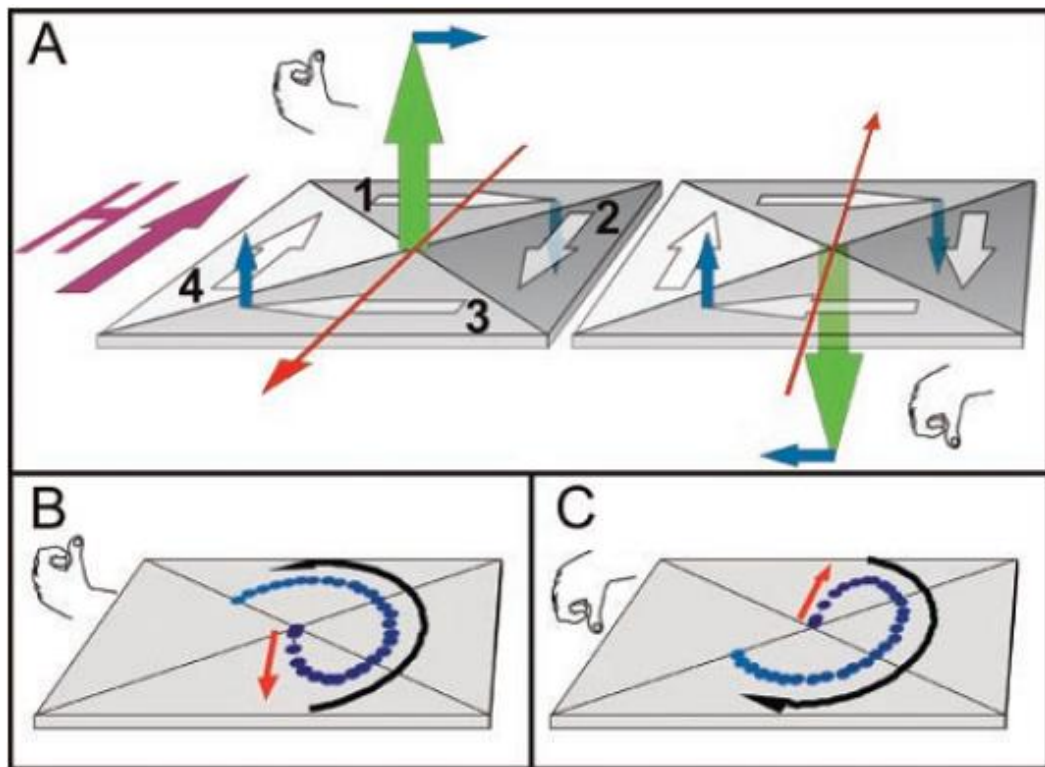


Figura 23. (a) Estructura del espín (flechas blancas) de un vórtice cuadrado orientado a izquierdas (lado izquierdo) y a derechas (lado derecho). Las flechas azules representan el torque precedente generado por el campo magnético externo (flecha morada). Las manos ilustran la orientación del vórtice y la flecha verde la imanación fuera de plano de la imanación del núcleo. Las flechas rojas representan la dirección de la aceleración en respuesta al campo. (b), (c) vórtices orientados a izquierdas y a derechas, respectivamente durante y tras la aplicación de un pulso de campo.

Los resultados experimentales demuestran que el núcleo del vórtice realizará un movimiento girotrópico tras el pulso de campo y que el movimiento inicial del núcleo del vórtice sea paralelo o anti-paralelo al campo depende de la quiralidad del vórtice.

El movimiento girotrópico del núcleo del vórtice puede verse cómo la excitación del vórtice magnético. Otros experimentos sobre la excitación magnética del vórtice han estudiado las frecuencias de resonancia y trayectorias del núcleo en *dots* circulares.

Se observó también que la frecuencia de oscilación del núcleo del vórtice aumenta a medida que disminuye el diámetro del *dot*. Además, propusieron un modelo teórico que explica el comportamiento experimental.

En general, en este modelo el núcleo del vórtice se trata como una partícula caracterizada por la masa, las coordenadas, momento, etc. La ecuación de movimiento del núcleo del vórtice es [42]:

$$\hat{M} X'' - G \times X' + \delta_X W(X) = 0 \quad (19)$$

En esta ecuación, X es la coordenada del núcleo del vórtice, W(X) representa la energía del vórtice desplazado desde su posición de equilibrio en el centro del *dot*. M es un tensor que representa la masa del vórtice (que generalmente se desprecia). Una de las consecuencias de esta ecuación es que permite deducir la frecuencia de resonancia de la oscilación del núcleo del vórtice.

$$\omega_0 = 8\pi\gamma M_s F(\beta) \quad (20)$$

$\beta = L/R$  representa la relación de aspecto de los *dots* cilíndricos de permaloy. Además, si  $\beta \ll 1$ , entonces:

$$\omega_0 = (20/9)\gamma M_s \beta \quad (21)$$

Esto implica que la frecuencia de resonancia del núcleo del vórtice es proporcional la relación de aspecto del *dot*. Este resultado puede comprenderse con facilidad teniendo en cuenta que la velocidad del núcleo sólo depende del grosor del *dot* ( $v \propto L$ ). Y la frecuencia de resonancia  $\omega_0 \propto v/R$ , i.e. el núcleo se mueve con velocidad uniforme en el *dot*. Finalmente, se tiene:

$$\omega_0 \propto L/R = \beta \quad (22)$$

### 1.3.1 Aplicaciones de los vórtices magnéticos.

Existen múltiples aplicaciones de los vórtices magnéticos, a día de hoy. Una de las posibilidades es su uso en espintrónica. El objetivo principal de la espintrónica es conseguir controlar la configuración del espín de los electrones, responsable principal de su comportamiento magnético, en lugar de su carga negativa. En la gran mayoría de dispositivos actuales la tecnología electrónica se basa en el movimiento de las cargas. El control del espín de los electrones puede abrir las puertas a nuevos dispositivos más compactos y rápidos, como antenas emisoras de ondas de espín, generadores de señal, así como memorias y dispositivos lógicos.

En [26] se describe la forma de obtener antenas de escala nanoscópica. Se basaría en la superposición de nanopilares de nanocapas de escala nanoscópica, separadas por una capa no magnética extremadamente delgada de cobre, con vórtices magnéticos que se hacen oscilar al unísono. De esta forma puede generarse una potente señal que puede emplearse en los teléfonos móviles, ordenadores y dispositivos de última generación.

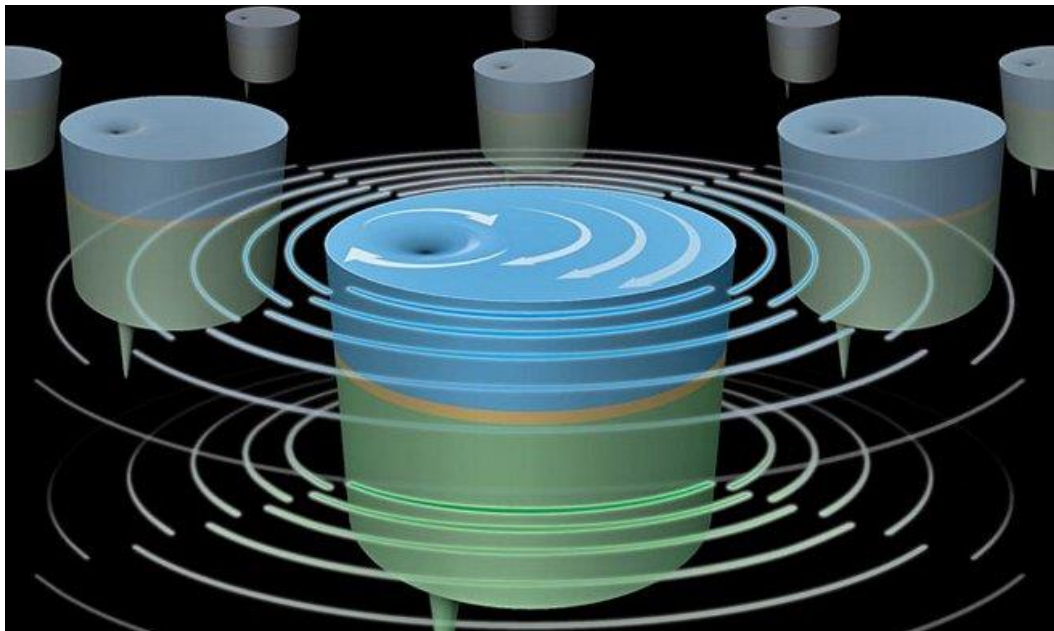


Figura 24. Nanopilares con vórtices magnéticos para generar una señal oscilatoria.

Con estas estructuras se pueden conseguir osciladores unas 100.000 veces más pequeños que los osciladores habituales basados en el voltaje, de forma que además del tamaño se reduce muy notablemente su consumo energético y su precio. En los resultados que obtuvieron comprobaron que cuanto más delgada fuera la capa



de separación de cobre, mayor era la sincronización entre los dos vórtices en un movimiento espacial circular. Ello abrió las puertas a la creación de *arrays* de pequeños osciladores sincronizados en apilamientos 3D que superan la limitación de potencia las antenas espintrónicas basadas en estados de imanación uniforme.

En [27] se menciona la aplicación de vórtices magnéticos para construir transistores. Se basa en el uso de permaloy ( $\text{Py:Ni}_{80}\text{Fe}_{20}$ ) con una anisotropía magneto-cristalina despreciable mediante y discos delgados de 40 nm con diámetro  $2R=200$  nm, de forma que se consigue una estructura estable de vórtice. Se consigue el efecto de amplificación continua del giro del núcleo del vórtice magnético acoplando dos o tres vórtices controlando las polaridades relativas de sus núcleos. La amplificación se ajusta invirtiendo la polaridad del vórtice intermedio en una secuencia de 3 vórtices. Se demuestra la ganancia es función de la amplitud de la señal de entrada.

Por otro lado, tradicionalmente en los experimentos de magneto-resistencia gigante (GMR), la corriente usada para detectar la magneto-resistencia se propaga paralelamente a los interfaces de la estructura plana multi-capa (CPP). Sin embargo, una aproximación alternativa es la corriente perpendicular al plano, el llamado efecto CCP-GMR. Así funcionan los dispositivos basados en nanoestructuras con GMR, cuya primera noticia fue dada por Bussmann en 1999. La estructura multi-capa está compuesta de:

$\text{Si/SiN/40Ta/1500Cu/7Ta/20Cu//}(23\text{NiFeCo}/40\text{Cu}/12\text{NiFe}/40\text{Cu})_5/1000\text{Cu}/1500\text{SiN}$ .

El diámetro del dispositivo es de  $0.3 \mu\text{m}$ . La corriente se propaga de forma perpendicular al plano.

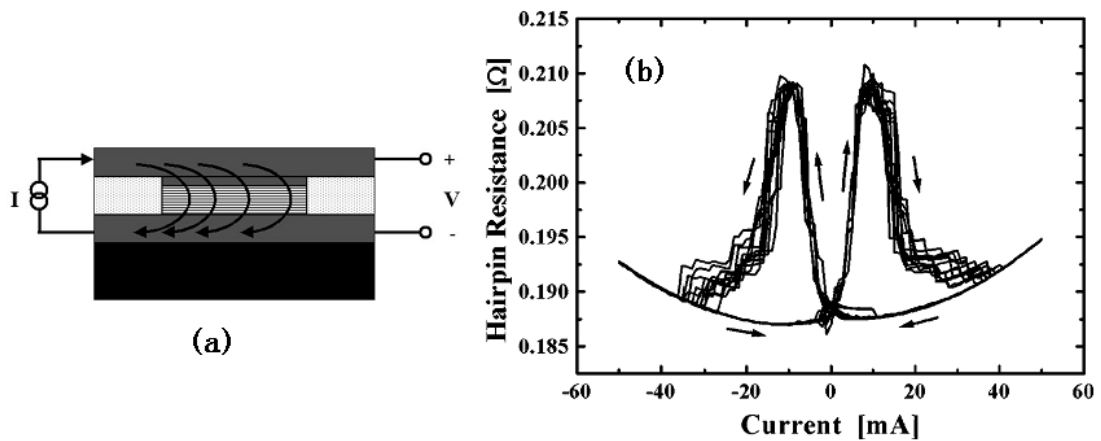


Figura 25. (a) Configuración de la medida y geometría empleada para determinar la resistencia del dispositivo. (b) Resistencia medida en un dispositivo multi-capa de  $0.3 \mu\text{m}$  de diámetro con 10 muestras.

Las características más notables de este resultado son los significativos cambios de la resistencia (en torno al 11%). Estos cambios se atribuyen a la reorientación de la configuración de la imanación en el dispositivo multi-capa, causados por el campo rotacional generado por la corriente que atraviesa el dispositivo. Se concluye que la capa magnética presenta un patrón de vórtice, de forma que si los vórtices de las diferentes capas tienen la misma polaridad, el dispositivo estará en un estado de baja resistencia y si los vórtices de dos capas tienen polaridad opuesta, el dispositivo estará en un estado de alta resistencia.

# **2**

## **Desarrollo del proyecto**

## 2.1. Dinámica de un vórtice en un *dot* magnético

En este trabajo se ha estudiado la dinámica de un vórtice en un *dot* magnético. En dicha dinámica se producen regímenes transitorios y cuasi-estacionarios, de unos pocos nanosegundos, cuando se aplica un campo oscilatorio externo. Se deriva un sistema dinámico de ecuaciones no lineales con la suposición de que la fuente principal de no-linealidad es la energía magnetostática [4]. En régimen estacionario se demostró la existencia de bifurcaciones de pliegue y se calcularon las frecuencias de resonancia del vórtice como función de la amplitud y la frecuencia del campo oscilante. También se demostró que en régimen transitorio el núcleo del vórtice describe una trayectoria de radio oscilante.

El modelo parte de la ecuación de movimiento de Landau-Lifshitz-Gilbert que, como se cita en [31], se puede usar para describir el efecto de espín-torque en materiales ferromagnéticos de escala nanoscópica. Esta ecuación particularizada para el campo clásico de imanación  $\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$  es:

$$\dot{\mathbf{m}} = g\mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{m}} + \alpha \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}} \quad (23)$$

Donde  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_S$  es la imanación reducida en unidades de la imanación de saturación  $M_S$ ,  $\gamma$  es la razón giro-magnética y  $\alpha$  la constante de amortiguamiento de Gilbert. Se usa la densidad de energía magnética  $w[\mathbf{m}(\mathbf{r},t)]$ , sustituyendo  $\mathbf{m}(\mathbf{r},t)$  por  $\mathbf{m}[\mathbf{r},\mathbf{X}(t)]$ , donde  $\mathbf{X}=(X,Y)$  representa la posición del núcleo del vórtice. Al integrar sobre las coordenadas  $\mathbf{r}$ , la densidad de energía  $w[\mathbf{m}(\mathbf{r},t)]$  se hace función de la posición del núcleo del vórtice  $W(\mathbf{X})$ .

Tradicionalmente se ha venido considerando analíticamente el movimiento de un vórtice en el límite de pequeña señal usando la ecuación de movimiento de Thiele para  $\mathbf{X}$  [32][35], en combinación con la función de energía  $W(\mathbf{X})$  para una geometría dada del *dot*. Considerando una fuerza de amortiguamiento, podemos formular la ecuación [4]:

$$-\mathbf{G} \times \dot{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{X}} + \frac{\nabla W(\mathbf{X})}{|\nabla W(\mathbf{X})|} = 0 \quad (24)$$

$\hat{D}$  representa un tensor de amortiguamiento, que tiene forma diagonal para un *dot* circular. El primer término, la fuerza giro, es perpendicular al girovector:

$$\mathbf{G} = -G\mathbf{p}\mathbf{z}$$

Siendo  $G = 2\pi L M_s / \gamma$ ,  $L$  es el grosor del *dot* y  $\mathbf{z}$  el vector unitario perpendicular al plano del *dot*. En el límite lineal, suponiendo la descomposición  $W(\mathbf{X}) = W(\mathbf{0}) + (\kappa/2)|\mathbf{X}|^2$  la ecuación (24) puede resolverse analíticamente, como se hizo en [35]. Resulta una frecuencia de resonancia  $\omega_0 = G^{-1}\kappa$ .

Las cargas topológicas como la vorticidad ( $q$ ) y la polaridad ( $p$ ) determinan el girovector del vórtice, esencial para la dinámica del mismo. El amortiguamiento es adimensional y vale  $d = -D/|G| > 0$ . Suponemos que el coeficiente de amortiguamiento es muy pequeño ( $d \ll 1$ ) y despreciamos su término de no linealidad. Se considera sólo la coordenada  $\mathbf{X}$  de movimiento del vórtice, por ello también se desprecia la interacción de las ondas espín con el vórtice, que llevaría a la aparición de una masa del vórtice finita pero pequeña.

El modelo libre de polos del vórtice en movimiento utiliza una representación de la imanación  $\mathbf{m}(x,y)$  a través de una función compleja  $w(z, \bar{z}) = (m_x + im_y)/(1 + m_z)$ ,  $w(z, \bar{z}) = f(z)$  si  $|f(z)| < 1$  y  $w(z, \bar{z}) = f(z)/|f(z)|$  si  $|f(z)| > 1$ . La función analítica  $f(z) = i(C/R_C)[z - (Z + \bar{Z}z^2)]$  describe la función distribución de la imanación desplazada del vórtice en el *dot* como la superposición de un vórtice centrado en el punto  $z_1 = Z$  y un vórtice imagen  $z_2 = 1/\bar{Z}$ . Aquí,  $z = x + iy$ , estando  $x$  e  $y$  en unidades de  $R$ ,  $Z = (X + iY)/R$  describe la posición del núcleo y  $R_C$  es el radio del núcleo del vórtice.

La fuerza de restablecimiento del vórtice  $-\partial W(\mathbf{X})/\partial \mathbf{X}$ , responsable de la frecuencia girotrópica finita, queda determinada principalmente por el término de la energía magnetostática, ya que la contribución de la energía de intercambio es mucho menor. En el caso de la dinámica producida por un campo externo, hay que considerar también la energía de Zeeman. Según [35] y [36] la contribución de la energía dipolar resultó ser cuadrática para perturbaciones pequeñas, pero aparece un término de cuarto orden para desplazamientos mayores del núcleo, resultando para un *dot* circular:

$$W_{dem}(\mathbf{X}) = (\kappa/2)|\mathbf{X}|^2 + (\beta/4)|\mathbf{X}|^4$$

Si el *dot* fuera elíptico, requeriría anisotropía en los ejes X e Y, así como los correspondientes coeficientes de rigidez. La energía de Zeeman también es no lineal:

$$W_Z(\mathbf{X}) = -\int dV \mathbf{M} \cdot \mathbf{H} = -C(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{X}[\xi - \delta|\mathbf{X}|^2]$$

En esta expresión C es la quiralidad del vórtice mientras que  $\xi$  y  $\delta$  son constantes que se obtienen a partir de la media del volumen de los componentes de la imanación intra-plano  $m_x, m_y$  y  $\mathbf{h} = \mathbf{H}M_S V$ . Suponemos que el campo alterno de excitación de frecuencia  $\omega$  tiene polaridad circular y el parámetro  $h(t)$  representa el campo en notación compleja. Entonces si  $H(t) = H_0 e^{j\omega t}$ ,  $h(t) = H(t)M_S V$ .

Los coeficientes no lineales pueden también calcularse con el modelo libre de polos, siendo sus signos  $\beta > 0$ ,  $\delta > 0$ . El coeficiente de respuesta lineal es  $\xi = 2/(3R)$ , siendo R el radio del *dot* en este modelo. Puede probarse que la no linealidad de la energía de Zeeman es pequeña en comparación con la no linealidad de la energía magnetostática ( $\beta$ ). Esto corresponde a la aproximación  $H_0 \ll H_{an}$  ( $H_{an}$  es el campo de aniquilación del vórtice).

Por ello sólo se tendrá en cuenta la no linealidad correspondiente a  $\beta$  en lo subsiguiente. El signo de  $\beta$  resultó ser positivo según las simulaciones micromagnéticas [38][39], aunque posteriormente volveremos sobre este punto, ya que en el presente trabajo se ha estudiado el efecto e implicaciones una  $\beta$  negativa. Según [39] la no linealidad de  $W_{dem}(\mathbf{X})$  es considerable para  $|\mathbf{X}| > 0.13R$ . Se usará la amplitud del campo  $h_0$  en unidades de frecuencia de resonancia  $\omega_0$ ,  $h_0/\omega_0 = \gamma H_0/3\omega_0$ . En adelante se considerará el caso de que el núcleo del vórtice apunte hacia arriba, es decir  $p=1$ .

## 2.2. El sistema dinámico

Para analizar el comportamiento dinámico del movimiento del núcleo del vórtice en el *dot*, podemos llamar a las coordenadas del núcleo del vórtice  $(X(t), Y(t))$  y podemos escribir el vector complejo:

$$Z(t) = X(t) + iY(t) \quad (25)$$

que representaría la posición del vórtice respecto al tiempo. En un sistema de referencia que gira con la frecuencia del campo externo  $\omega$ , el vector posición del núcleo del vórtice sería:

$$Z(t) = u(t)e^{i[\omega t + \phi(t)]} \quad (26)$$

Aquí  $u(t)$  representa el radio de la órbita con  $|Z(t)|=u(t)$  y  $\phi(t)$  el desfase respecto al campo externo  $h(t)=h_0e^{i\omega t}$ , con la clásica notación de coordenadas polares para la variable compleja  $Z(t)$ . Ambos son función del tiempo y evolucionan con el mismo.

En primer lugar se realizó un estudio del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales obtenido como modelo de comportamiento en [4]:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -\omega + \omega_0 + \beta u^2 - \frac{h_0}{u} \sin \phi + \frac{d}{u} \dot{u} \\ \dot{u} = h_0 \cos \phi - d(\dot{\phi} + \omega)u \end{cases} \quad (27)$$

Veamos los distintos parámetros que intervienen en este sistema:

Parámetro	Significado
$\phi$	Desfase de la posición del núcleo del vórtice respecto al campo externo aplicado.
$u$	Módulo del vector posición del núcleo del vórtice
$\omega$	Frecuencia de oscilación del campo magnético externo aplicado $h(t)=h_0e^{i\omega t}$
$\omega_0$	Frecuencia de resonancia del núcleo del vórtice
$d$	Coeficiente de amortiguamiento
$h_0$	Amplitud del campo magnético externo aplicado $h(t)=h_0e^{i\omega t}$

$\beta$	Constante
---------	-----------

Tabla. I. Parámetros del sistema de ecuaciones.

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma de sistema dinámico como:

$$\dot{\phi} = -\omega + \frac{1}{1+d^2} \left[ h_0 (d \cos \phi - \sin \phi) \frac{1}{u} + \beta u^2 + \omega_0 \right] \quad (28)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{1+d^2} [h_0 (\cos \phi + d \sin \phi) - d(\beta u^2 + \omega_0)u] \quad (29)$$

Veamos que ambos sistemas son equivalentes. Sustituyendo el valor de  $u'$  en la expresión de  $\dot{\phi}'$ , se obtiene:

$$\dot{\phi} = -\omega + \omega_0 + \beta u^2 - \frac{h_0}{u} \sin \phi + \frac{d}{u} \left[ h_0 \cos \phi - d(\dot{\phi} + \omega)u \right]$$

Agrupando los términos de  $\dot{\phi}$  y operando se obtiene:

$$\dot{\phi} \left[ 1 + \frac{d^2}{u} \right] = -\omega + \omega_0 + \beta u^2 - \frac{h_0}{u} \sin \phi + \frac{d}{u} h_0 \cos \phi - d^2 \omega$$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{1+d^2} \left[ -(1+d^2)\omega + \omega_0 + \frac{1}{u} (dh_0 \cos \phi - h_0 \sin \phi) + \beta u^2 \right]$$

$$\dot{\phi} = -\omega + \frac{1}{1+d^2} \left[ h_0 (d \cos \phi - \sin \phi) \frac{1}{u} + \beta u^2 + \omega_0 \right]$$

que resulta en la ecuación (28). Y para la variable  $u$ :

$$\dot{u} = h_0 \cos \phi - d(\omega - \omega + \omega_0 + \beta u^2 - \frac{h_0}{u} \sin \phi + \frac{d}{u} \dot{u})u$$

$$\dot{u}(1+d^2) = h_0 \cos \phi - d(\omega_0 u + \beta u^3 - h_0 \sin \phi)$$

$$\dot{u} = \frac{1}{1+d^2} [h_0 (\cos \phi + d \sin \phi) - \omega_0 du + \beta du^3]$$



$$\dot{u} = \frac{1}{1+d^2} [h_0(\cos \phi + d \sin \phi) - d(\beta u^2 + \omega_0)u]$$

Por otro lado, podemos derivar para hallar el módulo al cuadrado del vector velocidad del vórtice (26):

$$Z'(t) = [u'(t) + i\omega u(t) + i\phi'(t)u(t)]e^{i[\omega t + \phi(t)]}$$

$$|Z'(t)|^2 = [u'(t)]^2 + [\omega + \phi'(t)]^2 u^2(t)$$

$$|Z'(t)|^2 = \frac{1}{1+d^2} \left\{ h_0^2 (\beta u^2 + \omega_0)u^2 + 2h_0 (\beta u^2 + \omega_0)u(1 - \sin \phi) \right\} \quad (30)$$

## 2.3. El límite lineal

Podemos estudiar el comportamiento del sistema en el caso lineal, es decir cuando  $\beta=0$ . En dicho caso, el sistema se transforma en:

$$\begin{aligned} Z'(t) &= -\frac{\omega_0}{d+i}Z + h_0 \frac{ie^{i\omega t}}{d+i} = -\frac{(d-i)\omega_0}{1+d^2}Z + h_0 \frac{i(d-i)e^{i\omega t}}{1+d^2} = \\ &= i \frac{(1+id)\omega_0}{1+d^2}Z + h_0 \frac{(1+id)e^{i\omega t}}{1+d^2} = \frac{1+id}{1+d^2} [i\omega_0 Z + h_0 e^{i\omega t}] \end{aligned}$$

La solución de este sistema es:

$$Z(t) = \left[ Z(0) - \frac{ih_0}{\omega_0 + id\omega - \omega} \right] e^{\frac{i\omega_0}{1+d^2}t} e^{-\frac{d\omega_0}{1+d^2}t} + \frac{ih_0}{\omega_0 + id\omega - \omega} e^{i\omega t} \quad (31)$$

Esta expresión es la correspondiente a un oscilador lineal amortiguado, con una solución estacionaria única, correspondiente al último término de la ecuación (31), es decir el vórtice gira en una dirección con frecuencia angular y la frecuencia de resonancia para un  $h_0$  dado sería la de un oscilador lineal amortiguado ( $\omega_0$ ). El radio correspondiente sería:

$$u_0 = \left| \frac{ih_0}{\omega_0 + id\omega - \omega} \right| = \frac{h_0}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + d^2 \omega^2}}$$

Y la fase:

$$\phi_0 = \arg \frac{ih_0}{\omega_0 + id\omega - \omega} = \arg \left[ e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{h_0(\omega_0 + id\omega - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + d^2\omega^2} \right] = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{d\omega}{\omega_0 - \omega}$$

El radio tiene forma de curva lorentziana [37]. El diagrama de fases resultante sería un sumidero en espiral en las coordenadas  $(\Phi_0, u_0)$  al que todas las trayectorias del plano caerían exponencialmente.

Otro caso de interés matemático se da para  $h_0 \rightarrow 0$ . En dicho caso las ecuaciones (28) y (29) resultan:

$$\dot{\phi} = -\omega + \frac{1}{1+d^2} [\beta u^2 + \omega_0]$$

$$\dot{u} = \frac{1}{1+d^2} [-d(\beta u^2 + \omega_0)u]$$

Recordamos que para estudiar los equilibrios del sistema haríamos  $\dot{u} = \dot{\phi} = 0$  (ver 1.2.6). De esta forma, el sistema tiene un equilibrio en  $u_0=0$  y si  $\beta$  es negativa, que es el caso principalmente estudiado en el presente trabajo, un círculo de equilibrios inestables de radio  $u_e = \sqrt{\omega_0/|\beta|}$ .

Así, para valores del radio  $u > u_e$ , el núcleo del vórtice escaparía espontáneamente del *dot* (zona de escape), mientras que para valores tales que  $u < u_e$  el núcleo del vórtice quedaría confinado en el *dot* (zona de confinamiento), yendo de forma natural hacia el centro del *dot* ( $u=0$ ). El plano de fases en este caso presenta dos ceroclinas, una para  $u=0$  y otra para  $u=u_e$ . Si nos situamos en el sistema de referencia de laboratorio (equivalente a escribir  $\omega=0$ ) la figura resultante es aún más clara.

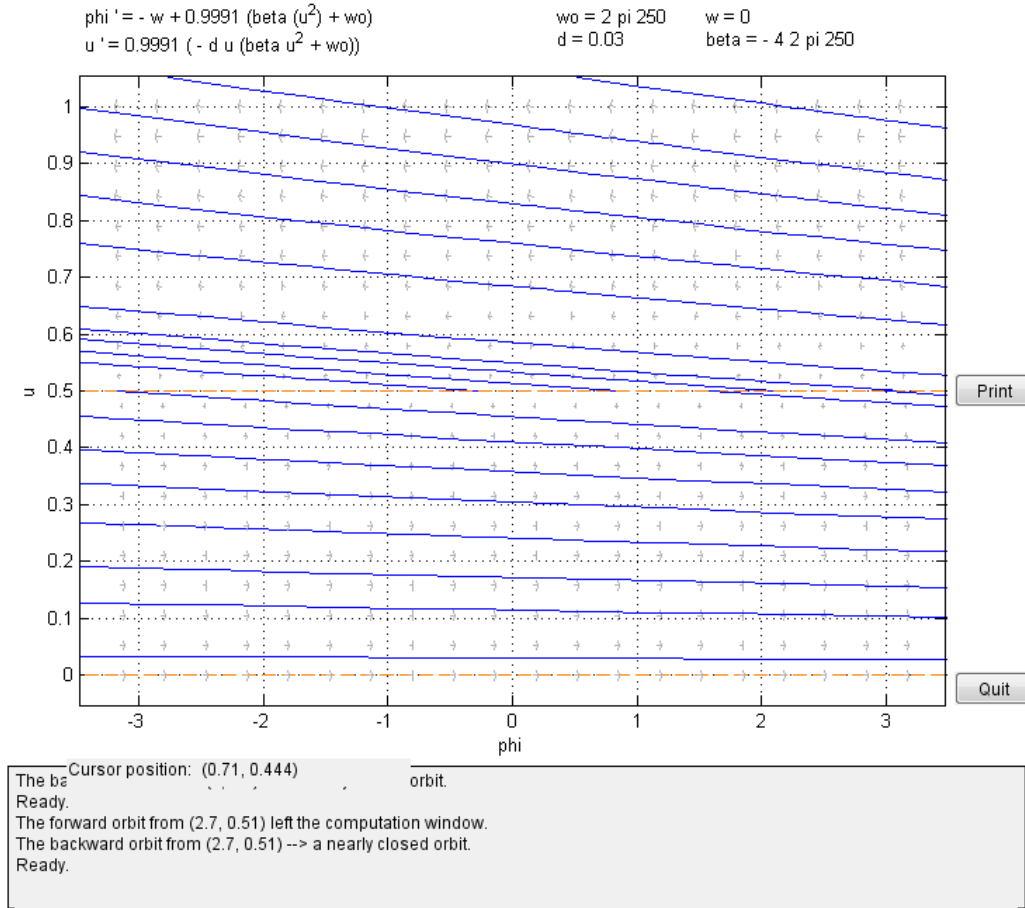


Figura 26. Plano de fases para  $h_0=0$ ,  $\omega=0$  y  $\beta$  negativa ( $\beta=-4\omega_0$ ).

Se aprecian las dos ceroclinas mencionadas, una en color rosa para  $u=0$  y la otra para  $u_e = \sqrt{250 \cdot 2\pi / 4 \cdot 250 \cdot 2\pi} = 0.5$ , con los valores dados a los parámetros para generar la figura. En el radio  $u_e$  el sistema tiene un círculo de equilibrios y en  $u=0$  un atractor espiral. La ecuación de las órbitas es  $\frac{du}{d\phi} = -du$ , es decir todas (excepto las de radio  $u_e$ ) son espirales logarítmicas que van del círculo  $u=u_e$  hacia el sumidero en el origen, o bien escapan del círculo. El círculo  $u=u_e$  es una fuente o repulsor.

## 2.4. Estudio analítico del sistema

Continuando con el análisis del sistema dinámico no lineal, podemos deducir sus puntos estacionarios o soluciones de equilibrio:

$$(\phi_0, u_0) / \quad \dot{u} = 0, \quad \dot{\phi} = 0 \quad (32)$$

Para ello, a partir del sistema dado por (27), podemos despejar  $(h_0)^2$  de la siguiente forma:

$$d \frac{\dot{\phi}}{\dot{u}} = -\omega d + \frac{1}{1+d^2} [h_0(1+d^2) \cos \phi] \frac{1}{u}$$

$$h_0 \cos \phi = \dot{u} + d(\dot{\phi} + \omega)u \quad (33)$$

$$u \dot{\phi} - d \dot{u} = -u\omega + \frac{1}{1+d^2} [-h_0(1+d^2) \sin \phi + (\omega_0 + \beta u^2)u + d^2(\omega_0 + \beta u^2)u]$$

$$h_0 \sin \phi = -(\omega + \dot{\phi} - \omega_0 - \beta u^2)u + d \dot{u} \quad (34)$$

$$h_0^2 = \left[ \dot{u} + d(\dot{\phi} + \omega)u \right]^2 + \left[ (-\dot{\phi} - \omega + \omega_0 + \beta u^2)u + d \dot{u} \right]^2$$

Aplicando ahora la condición (32) de puntos estacionarios:

$$h_0^2 = d^2 \omega^2 u^2 + \left[ (-\omega + \omega_0 + \beta u^2)u \right]^2 \quad (35)$$

Operando se obtiene:

$$\square$$

$$h_0^2 = (d^2 \omega^2 + \omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0)u^2 + \beta^2 u^6 + 2\beta(\omega_0 - \omega)u^4 \quad (36)$$

Las soluciones (en  $u$ ) de esta ecuación nos dan los radios  $u_0$  de los equilibrios en el plano  $(\phi, u)$ , que corresponden a órbitas circulares del núcleo del *dot*. Esta ecuación podemos verla como un polinomio de tercer grado, tras realizar un cambio de variable ( $u^2=x$ ), e igualando a cero:

$$f(x) = x^3 - 2nx^2 + (n^2 + m^2)x - l^2 = 0 \quad (37)$$

Siendo:

$$n = \frac{\omega - \omega_0}{\beta}, m = \frac{d\omega}{\beta}, l = \frac{h_0}{\beta} \quad (38)$$

el polinomio también podemos verlo como:

$$(x-n)^2 + m^2 = \frac{l^2}{x}$$

Sabemos que el discriminante de un polinomio cúbico  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  es [29]:

$$D = b^2c^2 - 4c^3 - 4b^3d - 27d^2 + 18bcd$$

En el caso de (37):

$$b = -2n, c = n^2 + m^2, d = -l^2$$

y

$$\begin{aligned} D &= 4n^2(n^2 + m^2)^2 - 4(n^2 + m^2)^3 + 4 \cdot 8n^3(-l^2) - 27l^4 + 18(2n)(n^2 + m^2)(l^2) \\ &= -4m^2(n^2 + m^2)^2 + 4n(n^2 + 9m^2)l^2 - 27l^4 \end{aligned}$$

El discriminante permite determinar [29] si existe una ( $D < 0$ ), dos ( $D = 0$ ) o tres ( $D > 0$ ) soluciones de la ecuación de los radios de equilibrio (37). El caso límite  $D = 0$  es aquel en el que se producen las bifurcaciones:

$$0 = -4m^2(n^2 + m^2)^2 + 4n(n^2 + 9m^2)l^2 - 27l^4$$

Esta es una ecuación bicuadrática para  $l$ , que tendrá solución si el (segundo) discriminante

$$\begin{aligned} &[4n(n^2 + 9m^2)]^2 - 4 \cdot 27 \cdot 4m^2(n^2 + m^2)^2 \\ &= -16(3m^2 - n^2)^3 \end{aligned}$$

es mayor que cero. En variables físicas (38):

$$D = -\frac{27}{b^4} h_0^4 + \frac{4n}{b^5} (9d^2 w^2 + n^2) h_0^2 - \frac{4d^2 w^2}{b^6} (d^2 w^2 + n^2)^2 \quad (39)$$

donde  $n = W - W_0$ . Se trata de una ecuación bicuadrática para  $h_0^2$ , y séxtica para  $W$ , por lo que su estudio respecto al parámetro de intensidad del campo externo es más sencillo que respecto al de frecuencia del campo externo. La condición de existencia de bifurcaciones se reescribe como

$$-16(3m^2 - n^2)^3 = \frac{16}{b^6}[(W - W_0)^2 - 3d^2W^2]^3 \geq 0 \quad (40)$$

Por lo tanto, si  $|W - W_0| < \sqrt{3}dW$  no puede haber bifurcaciones y, al estar asegurada la existencia de una raíz real de la ecuación cúbica (en  $u^2$ ) (36), en este caso hay un solo radio de equilibrio. Si  $|W - W_0| > \sqrt{3}dW$  pueden existir tres raíces pero sólo para ciertos rangos de valores de  $h_0$  que se deducen al buscar las soluciones reales  $h_0^2$  positivas de (39). Las soluciones son:

$$h_0^2 = \frac{2}{27\beta} \left[ \nu(v^2 + 9d^2\omega^2) - \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} \right] \quad \text{ó} \quad h_0^2 = \frac{2}{27\beta} \left[ \nu(v^2 + 9d^2\omega^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} \right]$$

Si  $b$  es positiva habrá tres radios de equilibrio ( $D > 0$ ) cuando

$$\frac{2}{27\beta} \left[ \nu(v^2 + 9d^2\omega^2) - \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} \right] < h_0^2 < \frac{2}{27\beta} \left[ \nu(v^2 + 9d^2\omega^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} \right] \quad (41)$$

y si  $b$  es negativa cuando

$$\frac{2}{27|\beta|} \left[ -\nu(v^2 + 9d^2\omega^2) - \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} \right] < h_0^2 < \frac{2}{27|\beta|} \left[ -\nu(v^2 + 9d^2\omega^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} \right] \quad (42)$$

Al ser  $h_0^2$  positiva, siempre es necesario que

$$\nu(v^2 + 9d^2\omega^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} > 0 \quad \text{si } b \text{ es positiva} \quad (43)$$

$$-\nu(v^2 + 9d^2\omega^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} > 0 \quad \text{si } b \text{ es negativa} \quad (44)$$

En el caso de  $b$  positiva, tenemos entonces dos desigualdades que satisfacer, (40) y (43):

$$\begin{aligned} v^2 - 3d^2\omega^2 &> 0 \\ \nu(v^2 + 9d^2\omega^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2\omega^2)^3} &> 0 \end{aligned}$$

La primera desigualdad es  $(W - W_0)^2 - 3d^2 W^2 = (1 - 3d^2)W^2 - 2W_0 W + W_0^2 > 0$ , cuadrática en  $W$ , y asumiendo, como se da en la práctica, que

$$3d^2 \ll 1$$

no se satisface en el intervalo  $W \in \left[ \frac{1 - \sqrt{3}d}{1 - 3d^2} W_0, \frac{1 + \sqrt{3}d}{1 - 3d^2} W_0 \right]$ . Para valores  $W < W_0$  ( $n$  negativa) la segunda desigualdad no se cumplirá si

$$\begin{aligned} & \nu(v^2 + 9d^2 \omega^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2 \omega^2)^3} < 0 \\ \Leftrightarrow & \nu^2(v^2 + 9d^2 \omega^2)^2 - (v^2 - 3d^2 \omega^2)^3 = 27d^2 \omega^2 (v^2 + d^2 \omega^2)^2 > 0 \end{aligned}$$

que siempre se satisface, por lo que no hay tres radios de equilibrio con  $W < W_0$ . Resumiendo, en el caso de  $b$  positiva para que haya tres radios de equilibrio es necesario que  $W > W_1 = \frac{1 + \sqrt{3}d}{1 - 3d^2} W_0$ . Para un  $h_0$  fijo, como ambos lados de la inecuación (41) son crecientes en  $W$  y tienden a infinito, al crecer  $\omega$  a partir de  $W_1$  llegará un momento (llamémosle  $W = W_2$ ) en que el valor del lado izquierdo iguale a  $h_0^2$  y vuelva a haber un solo equilibrio. Todo esto se ilustra en las figuras de la sección 2.5.1.

Mediante el programa desarrollado en MATLAB (ver sección 4.1.6) se han representado en la Figura 27 las dos curvas de la inecuación (41), que delimitarían en este caso las tres regiones del plano en el primer cuadrante donde se cumplen ambas inecuaciones simultáneamente (zona delimitada entre las dos curvas), o sólo una de ellas (zona por debajo de la curva inferior o por encima de la superior). Conviene resaltar que la condición se mira respecto al valor de  $h_0$ , es decir trazando una línea vertical en el eje de abscisas con el valor correspondiente, que en función de dónde se corte con  $\omega$  dará lugar a uno o tres equilibrios en el sistema. La curva única de la parte inferior izquierda es la condición de resonancia (45) que se explica algo más abajo.

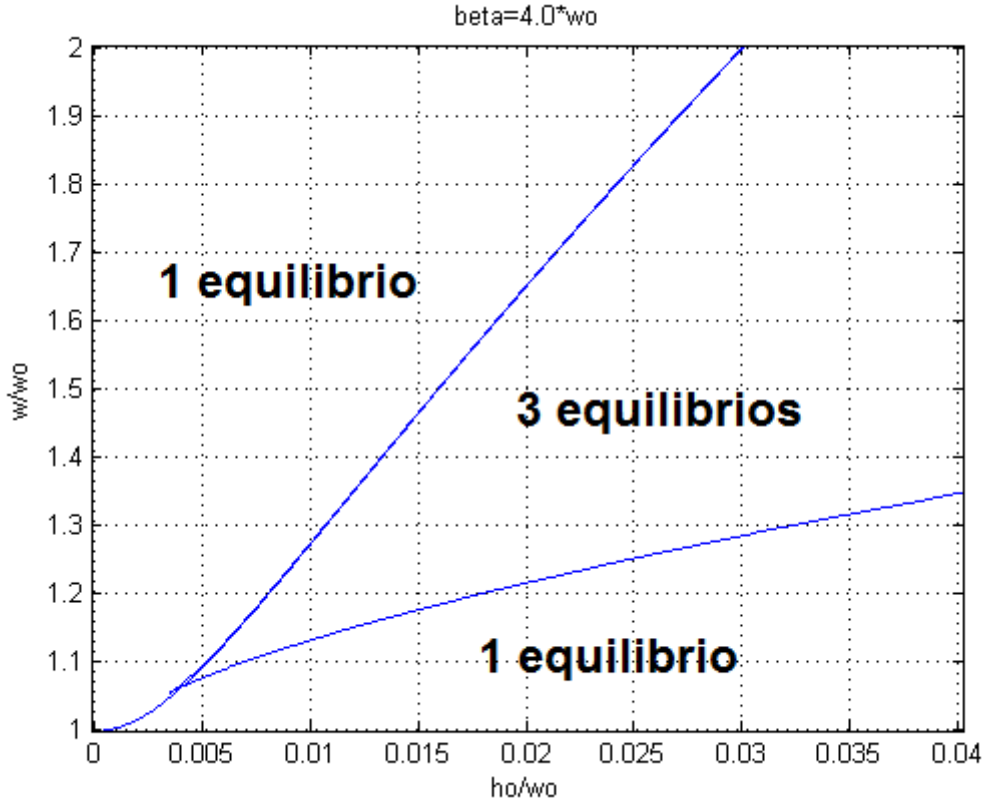


Figura 27. Representación de las inecuaciones (41) y resonancia a campo externo débil para  $\beta$  positiva ( $\beta=4\omega_0$ ).

En el caso de  $b$  negativa, las dos desigualdades a satisfacer son

$$n^2 - 3d^2w^2 > 0$$

$$-n(v^2 + 9d^2w^2) + \sqrt{(v^2 - 3d^2w^2)^3} > 0$$

La primera desigualdad es la misma que en el caso anterior. La segunda implica, razonando como más arriba, que  $n < 0$  y por tanto ahora ha de ser

$w < w_3 = \frac{1 - \sqrt{3}d}{1 - 3d^2} w_0$ . Debido a esto, para un  $h_0$  fijo siempre habrá un  $w$  a partir del

cual sólo hay un radio de equilibrio. El lado izquierdo de (42) tiende a cero cuando  $w$  tiende a cero, comienza siendo creciente pero presenta un máximo para cierto valor de  $w$  y comienza a decrecer hasta que  $w = w_3$ . Por ello, para ciertos valores de  $h_0$  puede haber dos intervalos disjuntos  $[0, w_1)$  y  $(w_2, w_3)$  en los que (42) se satisfaga y haya tres radios de equilibrio. Todo esto se ilustra en la sección 2.5.2 con diversos



gráficos.

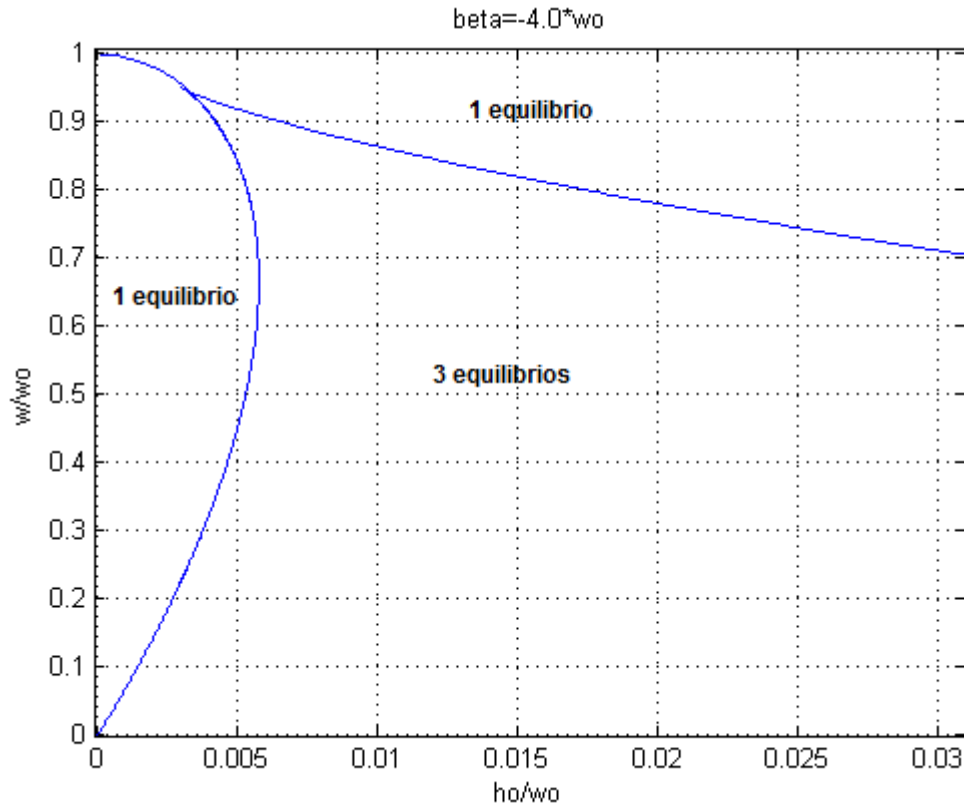


Figura 28. Representación de las inecuaciones (42) y resonancia a campo externo débil para  $\beta$  negativa ( $\beta = -4\omega_0$ ).

Una vez determinados los radios de equilibrio  $u_0$ , los desfases  $\phi_0$  se pueden obtener de las ecuaciones de las cerodinas, como ya vimos en el apartado 1.2.6, con la condición (32):

$$(\phi_0, u_0) / \dot{u} = 0, \dot{\phi} = 0$$

$$h_0 \cos \phi = d\omega u_0$$

□

$$h_0 \sin \phi = (-\omega + \omega_0 + \beta u_0^2) u_0$$

Linealizamos el sistema en torno a cada punto de equilibrio  $(\phi_0, u_0)$ , calculando la jacobiana:

$$\dot{u} = f(\phi, u)$$

$$\dot{\phi} = g(\phi, u)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \phi} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial \phi} & \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix}_{(\phi_0, u_0)}$$

Calculamos cada una de las derivadas parciales para construir la jacobiana:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{1}{1+d^2} \left[ h_0(-d \sin \phi - \cos \phi) \frac{1}{u} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{1+d^2} \left[ -h_0(d \cos \phi - \sin \phi) \frac{1}{u^2} + 2\beta u \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = \frac{1}{1+d^2} \left[ h_0(-\sin \phi + d \cos \phi) \frac{1}{u} \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{1+d^2} \left[ -d(3\beta u^2 + \omega_0) \right]$$

Teniendo en cuenta las relaciones (33), (34) y particularizando para el punto  $(\phi_0, u_0)$  podemos escribir:

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{1}{1+d^2} \left[ -d(-\omega + \omega_0 + \beta u_0^2)u_0 - d\omega u_0 \right] \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1+d^2} \left[ -d(\omega_0 + \beta u_0^2) \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{1+d^2} \left[ -h_0(d \cos \phi_0 - \sin \phi_0) \frac{1}{u_0^2} + 2\beta u_0 \right] = \frac{3\beta u_0^2 - (d^2 + 1)\omega + \omega_0}{u_0}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = \frac{1}{1+d^2} \left[ h_0(-\sin \phi_0 + d \cos \phi_0) \frac{1}{u} \right] = u_0(\omega d^2 - \beta u_0^2 + \omega - \omega_0)$$

Y la matriz del sistema linealizado queda:

$$M = \begin{bmatrix} -d(\beta u_0^2 + \omega_0) & \frac{3\beta u_0^2 - (d^2 + 1)\omega + \omega_0}{u_0} \\ u_0(\omega d^2 - \beta u_0^2 + \omega - \omega_0) & -d(3\beta u_0^2 + \omega_0) \end{bmatrix}$$

donde hemos despreciado el irrelevante término  $(1+d^2)^{-1}$ .

Como ya habíamos visto, el carácter de los puntos críticos del sistema viene dado por los invariantes de  $M$ . Para obtenerlos calculamos previamente la traza de  $M$  y el determinante de  $M$ .

$$\text{tr } M = \sum_i a_{ii} = -d(\beta u_0^2 + \omega_0) + [-d(3\beta u_0^2 + \omega_0)] = -2d(2\beta u_0^2 + \omega_0)$$

$$\det M = -2d(2\beta u_0^2 + \omega_0) - u_0(\alpha d^2 - \beta u_0^2 + \omega - \omega_0) \frac{1}{u_0} [(3\beta u_0^2 - (d^2 + 1)\omega + \omega_0)]$$

$$\det M = (d^2 + 1)[(2\beta u_0^2 - \omega + \omega_0)^2 + d^2 \omega^2 - \beta^2 u_0^4]$$

Podemos, ahora sí, calcular el discriminante de  $M$ :

$$\text{discr}(M) = \text{tr}^2 M - 4 \det M$$

$$\text{discr}(M) = 4[(d^2 + 1)\beta^2 u_0^4 - (2\beta u_0^2 - \alpha d^2 - \omega + \omega_0)^2]$$

Con él, podríamos determinar los autovalores a través de la conocida expresión

$$\lambda^\pm = \frac{\text{tr } M}{2} \pm \frac{\sqrt{\text{discr } M}}{2}$$

1. Podemos también determinar cuáles serían las frecuencias  $\omega$  para los que se alcanzan los valores máximos del radio  $u^2 = x_0$  de la trayectoria en las órbitas circulares estables. Existen dos clases de máximo: uno para un valor  $\omega_2 > \omega_0$  en la que la primera raíz  $x_1$  alcanza un máximo (ver Figura 35, por ejemplo).
2. La segunda raíz estable  $x_2$  es máxima, en caso de aparecer, siempre para valores de  $\omega < \omega_1 = \omega_0 / (1 - \sqrt{3}d)$ .

La frecuencia  $\omega_2$  del máximo de la primera raíz puede calcularse mediante diferenciación, considerando  $x$ ,  $n$  y  $m$  como funciones de  $\omega$ , derivando en la ecuación (37) con respecto a  $\omega$ . El máximo de  $x$  se alcanza cuando  $x'(\omega) = 0$ , asumiendo que  $x$  sea una función diferenciable respecto a  $\omega$ . Según el teorema de la función implícita esto se cumplirá si:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4nx + n^2 + m^2 \neq 0$$

En la expresión anterior, el miembro izquierdo es igual a cero cuando:

$$x = x_{\pm} = \frac{2n}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2n}{3}\right)^2 - \frac{n^2 + m^2}{3}} = \frac{2n}{3} \pm \sqrt{\frac{n^2}{9} - \frac{m^2}{3}}$$

Si  $n^2 < 3m^2$ , i.e.  $(|\omega - \omega_0|^2 < \sqrt{3}d\omega)$ , es decir en el rango donde sólo existe un equilibrio, se cumple el teorema de la función implícita y podemos eliminar  $x$  de  $f(\omega_2) = \frac{\partial f}{\partial \omega}(\omega_2) = 0$  para obtener la frecuencia de resonancia  $\omega_2$ :

$$(\omega_2 - \omega_0)\omega_2^2 + d^2\omega_2^3 = \frac{h_0^2\beta}{(1+d^2)d^2} \quad (45)$$

La frecuencia  $\omega_2$  es la que hemos denotado como resonancia a campo débil en las figuras (26) y (27). Si  $n^2 > 3m^2$  el teorema no se cumple en dos puntos  $x_{\pm}$ , que son los valores de  $x=u^2$  en las frecuencias de resonancia  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Y resulta que estos dos puntos son precisamente aquellos para los que  $f(\omega_p, m) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{\pm}) = 0$ , que equivale a la condición (39) del discriminante, por lo que puede usarse la condición  $D=0$  para obtenerlos.

## 2.5. Estudio de los radios de las órbitas de equilibrio

El siguiente paso consistió en estudiar el comportamiento de las soluciones respecto de  $u$  de la ecuación polinómica (35) al variar distintos parámetros. Estas soluciones son los radios de las órbitas de equilibrio (estables o inestables) del sistema (28)(29). Partimos entonces de las ecuaciones que determinan los puntos de equilibrio (33),(34) y (35) con  $\dot{u}=0, \dot{\phi}=0$ :

$$\begin{aligned} & (\beta u^2 - \omega + \omega_0)u^2 + d^2 w^2 u^2 = h_0^2 \\ & \square \\ & h_0 \cos \phi_0 = d\omega u_0, \quad h_0 \sin \phi_0 = (-\omega + \omega_0 + \beta u_0^2)u_0 \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones puede obtenerse una representación gráfica de cómo varía el radio de las soluciones de equilibrio cuando uno de los parámetros de la ecuación cambia. Esto ya fue realizado en [4], obteniéndose los gráficos representados en las figuras 1 y 2. Continuando con este análisis, se desarrollaron dos programas en MATLAB para estudiar el comportamiento de las soluciones para los distintos valores de  $\beta$  que se vieron en el apartado anterior. Los programas son *roots\_calculation\_vary\_ho.m* y *roots\_calculation\_vary\_w.m*. El primero representa la variación de las soluciones estacionarias cuando varía  $h_0$  para un valor de frecuencia angular  $\omega$  dado, permaneciendo el resto de parámetros constantes. El segundo hace lo propio cuando se varía  $\omega$  para un  $h_0$  dado y con el resto de parámetros constantes. Puede consultarse su código en la sección 4.1.

En los casos que corresponda se han delimitado con líneas rojas verticales los intervalos en que existen distinto número de soluciones.

Los resultados que se han obtenido se presentan en los apartados subsiguientes.

### **2.5.1. Representación de la variación de las raíces del polinomio para $\beta$ positiva**

En primer lugar, se representa la curva que describe cómo varían las soluciones  $u_0$  de la ecuación (35) al variar la amplitud del campo externo  $h_0$ , para ciertos valores representativos de  $\omega$ , la frecuencia angular del campo externo. En las gráficas representadas el eje de abscisas expresa la relación entre  $h_0$  y  $\omega_0$ , y el eje de ordenadas la amplitud de la órbita estacionaria del núcleo del vórtice magnético.

Se analiza el comportamiento para un valor de  $\beta$  igual a  $4\omega_0$ . Para este valor de  $\beta$  se varía el valor del parámetro  $h_0$ , dejando fijo  $\omega$  a  $1.4\omega_0$ ,  $1.2\omega_0$  y  $1.04\omega_0$ , generando y analizando las gráficas correspondientes con el programa *roots\_calculation\_vary\_ho.m* (ver apartado 4.1).

Podemos prever cómo se comportará el sistema a partir de las inecuaciones (41), trazando una línea horizontal para los valores correspondientes y observando la región en la que nos encontramos de la Figura 27 según vamos variando  $h_0$ , con un  $\omega$  dado:

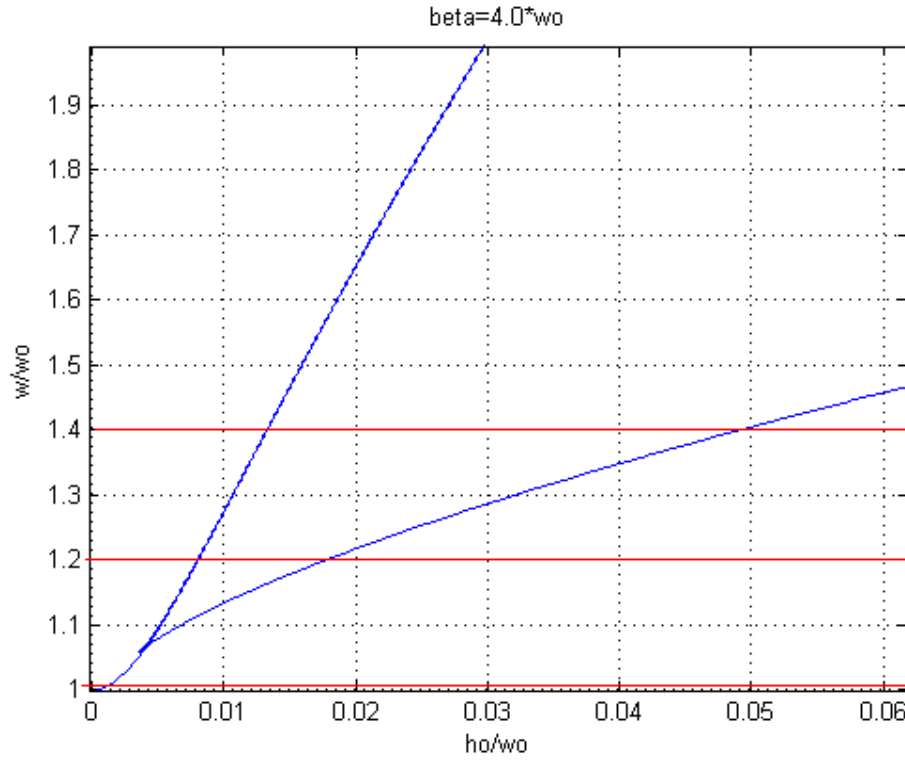


Figura 29. Intervalos delimitados por (41) con  $\beta = 4\omega_0$  y valores  $\omega = 1.04\omega_0$ ,  $\omega = 1.2\omega_0$  y  $\omega = 1.4\omega_0$ .

Esta figura es la misma que la Figura 27 pero se han añadido 3 líneas rojas horizontales correspondientes a los tres valores de  $\omega$  que se estudian en este apartado.

Como ya vemos, para el caso de  $\omega = 1.4\omega_0$ , el sistema tendrá un equilibrio en el intervalo  $0 < h_0/\omega_0 < 0.017$ , aproximadamente; tres equilibrios entre  $0.017 < h_0/\omega_0 < 0.05$  y de nuevo un equilibrio para valores  $h_0/\omega_0 > 0.05$ .

2.5.1.1. Resultados para  $\beta = 4\omega_0$  variando  $\omega$ 

$\omega_0 = \pi * 500$ ;  
 $d = 0.03$ ;  
 $\beta = 4\omega_0$ ;  
 $\omega = 1.4\omega_0$ ;

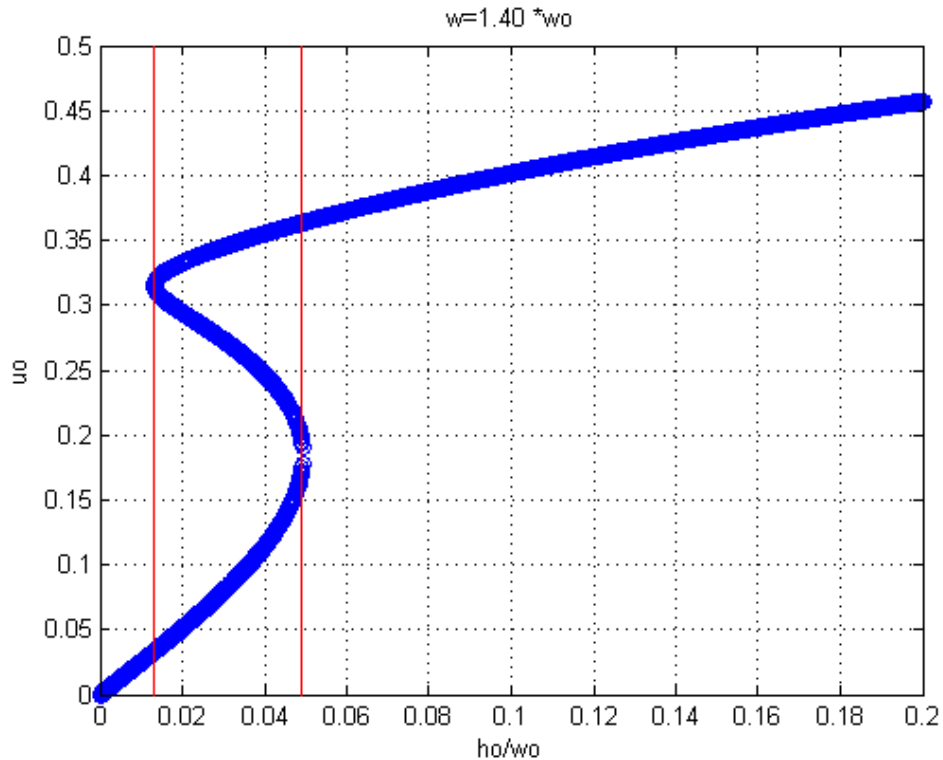


Figura 30. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $\omega = 1.4\omega_0$ .

Esta gráfica es análoga a de las figuras 1 y 2 del documento [4], que fue obtenida mediante un programa similar implementado en *Mathematica* por los autores del documento. Con ello se verificó la equivalencia entre este programa y el implementado en MATLAB para el presente trabajo.

Si observamos la gráfica vemos cómo la correspondencia entre valores del eje de abscisas y el de ordenadas no es unívoca, como se aprecia en la franja marcada por las dos líneas verticales rojas. Existen tres soluciones en el intervalo comprendido aproximadamente entre  $0.017 < h_0/\omega_0 < 0.05$ . Esto indica la posibilidad de que, para ciertos valores de la amplitud del campo externo  $h_0$ , pueden darse diferentes estados estacionarios en los que la amplitud de la órbita es distinta para un mismo valor de la frecuencia del campo de excitación, es decir existen bifurcaciones en las soluciones del sistema dinámico con estos valores. A este tipo de bifurcaciones se la llama *bifurcación de pliegue*. Es el tipo de comportamiento cualitativo que veremos en el diagrama de fase de la Figura 49 en la que se dan las condiciones para la existencia de las tres soluciones simultáneas.

Debido a este efecto no puede determinarse de forma unívoca el radio de la trayectoria estable en la posición final del núcleo del vórtice, a partir de la relación conocida  $h_0/\omega_0$ , cuando existen múltiples soluciones. Por ejemplo, cuando esta relación vale 0.04 resultan hasta tres valores posibles para el radio, como se aprecia en la gráfica anterior. Obviamente la relación sería unívoca fuera del intervalo marcado ( $h_0/\omega_0 < 0.019$  o  $h_0/\omega_0 > 0.062$ ) y existiría una solución única estable caracterizada por una órbita circular cuyo radio sería el valor de  $u$  del eje de ordenadas. Podría corresponder al comportamiento cualitativo observado por ejemplo en la Figura 47.

En experimentos reales, se observa como un proceso de histéresis, según [4]. De esta forma, al aumentar progresivamente el valor de la amplitud del campo magnético externo aplicado se observa cómo el núcleo del vórtice, que parte del centro del *dot*, va girando en una órbita circular estable cuyo radio de giro va aumentando hasta alcanzar el valor de  $h_0/\omega_0$  marcado por la línea roja vertical más a la derecha ( $h_0/\omega_0 = 0.062$  en la Figura 30), momento en que la órbita se hace inestable hasta entrar en una nueva órbita con un radio de giro mucho mayor (en la Figura 30 de 0.17 a 0.36, aproximadamente). A partir de este punto el radio de giro seguiría aumentando con  $h_0$  de forma suave.

Posteriormente, al disminuir progresivamente el valor del campo magnético en un proceso de barrido, sucede un fenómeno similar. El núcleo del vórtice sigue una trayectoria circular estable con un radio de giro que va disminuyendo uniformemente al hacerlo el valor de la amplitud del campo magnético hasta llegar al valor marcado por la línea roja vertical más a la izquierda ( $h_0/\omega_0 = 0.019$  en la Figura 30). En dicho punto la órbita se vuelve inestable y se produce un salto brusco a una órbita con un radio de giro mucho menor (en la Figura 30 de 0.32 a 0.04, aproximadamente). Si se sigue disminuyendo  $h_0$ , el radio de la órbita irá disminuyendo también progresivamente, ya sin saltos bruscos.

Este fenómeno que muestra un comportamiento diferente en la evolución de la dinámica del núcleo del vórtice según se aumente o disminuya el valor de la amplitud del campo magnético se conoce como histéresis y como veremos en el apartado 2.5.1.2 también sucede, aunque de forma diferente, con la variación de la frecuencia angular del campo magnético externo.



$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= 4\omega_0; \\ \omega &= 1.2\omega_0;\end{aligned}$$

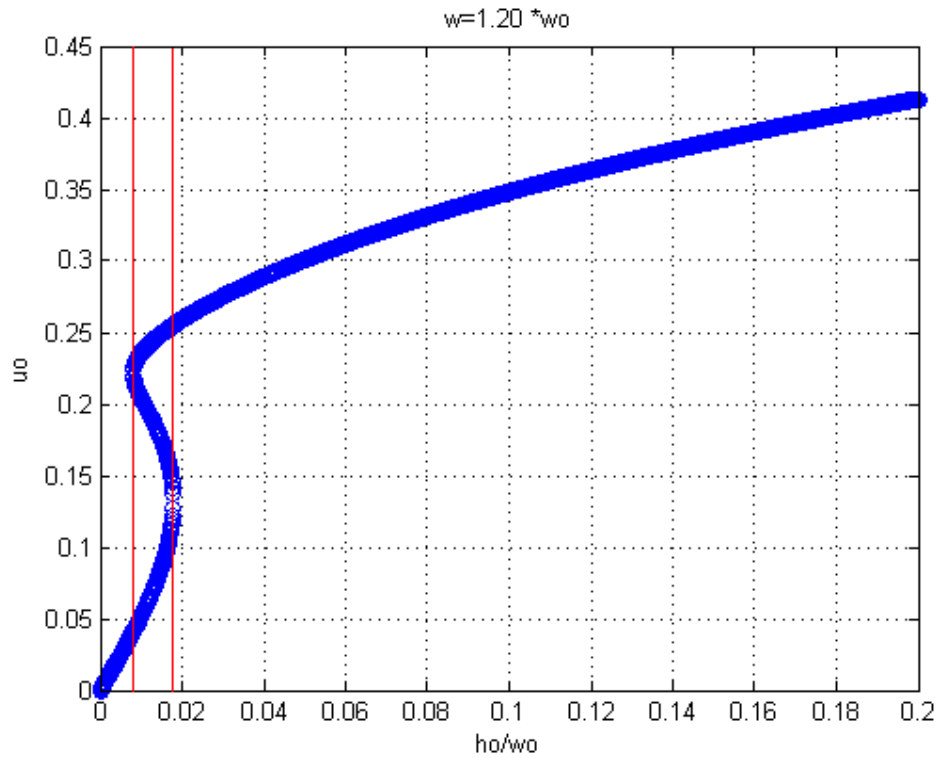


Figura 31. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $\omega = 1.2\omega_0$ .

Vemos también un comportamiento similar al anterior, aunque la zona de la curva en que aparecen las bifurcaciones es menor, pues sólo existen tres soluciones en el intervalo comprendido aproximadamente entre  $0.01 < h_0/\omega_0 < 0.019$ . Es decir, es otra bifurcación de pliegue aunque la multiplicidad de valores se da para un conjunto de valores de  $h_0/\omega_0$  más pequeño. El comportamiento cualitativo sería análogo al descrito para el caso anterior de  $\omega = 1.4\omega_0$  y por ello sería innecesario repetirlo.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= 4\omega_0; \\ \omega &= 1.04\omega_0;\end{aligned}$$

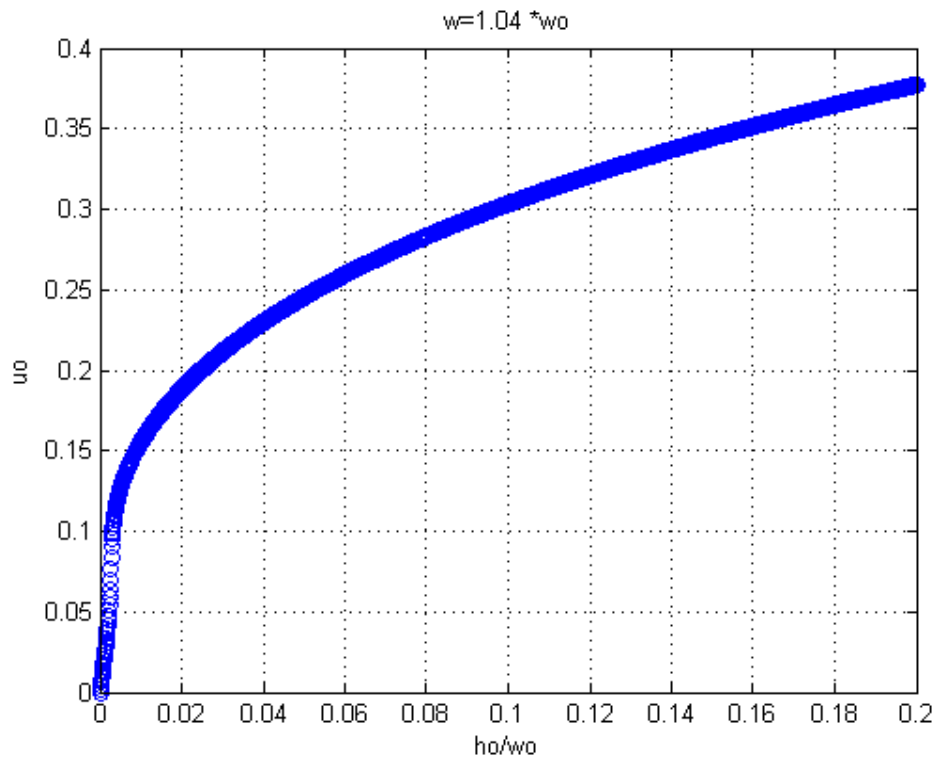


Figura 32. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $\omega=1.04\omega_0$ .

Vemos en este caso cómo la curva va adoptando una forma potencial y parecen desaparecer las bifurcaciones. Es decir al disminuir el valor de la frecuencia del campo magnético externo disminuyen, hasta desaparecer, los valores múltiples de  $u_0$  para el mismo valor de  $h_0/\omega_0$ , cuando  $\beta$  cuadruplica la frecuencia angular de resonancia. El comportamiento cualitativo resultante es pues muy diferente, ya no existen bifurcaciones y el sistema tiende hacia una órbita circular estable siempre con el mismo radio, que dependerá del valor de la relación  $h_0/\omega_0$  para el resto de parámetros fijos.

En segundo lugar, se representa la curva que describe cómo varían las soluciones de la ecuación al variar la frecuencia  $\omega$ , para ciertos valores representativos del parámetro  $h_0$ , la amplitud del campo magnético externo aplicado. En las gráficas representadas el eje de abscisas expresa la relación entre  $\omega$  y  $\omega_0$ , y el eje de ordenadas la amplitud de la órbita estacionaria del núcleo del vórtice magnético.

Se analiza el comportamiento para un valor de  $\beta$  de  $4\omega_0$ , como ya se hizo en el apartado anterior. Para cada uno de los valores de  $\beta$  se varía el valor del parámetro  $\omega$ , dejando fijo  $h_0$  a  $0.002\omega_0$ ,  $0.012\omega_0$  y  $0.03\omega_0$ , generando y analizando las gráficas correspondientes con el programa *roots\_calculation\_vary\_w.m* (ver apartado 4.1.4).

También ahora es posible prever cómo se comportará el sistema a partir de las inecuaciones (41), trazando en este caso líneas verticales para los valores correspondientes de  $h_0$  y observando la región en la que nos encontramos según vamos variando  $\omega$  en una gráfica análoga a la Figura 27:

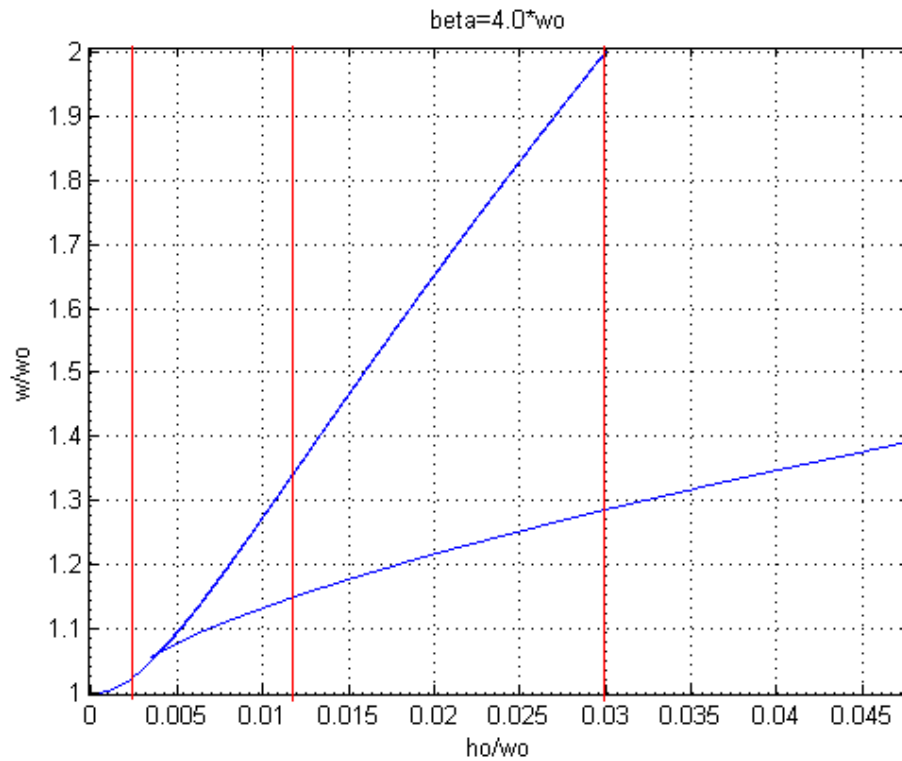


Figura 33. Intervalos delimitados por (41) con  $\beta = 4\omega_0$  y valores  $h_0 = 0.002\omega_0$ ,  $h_0 = 0.012\omega_0$  y  $h_0 = 0.03\omega_0$ .

El análisis sería similar al realizado justo antes de comenzar el apartado 2.5.1.1, aunque en este caso los intervalos se produzcan para los distintos valores de

$\omega$ , que sería el valor que se iría barriendo para atravesar las distintas regiones con distinto número de equilibrios.

Puede observarse, para el caso de  $h_0=0.01\omega_0$ , que el sistema tendrá un equilibrio en el intervalo  $0<\omega/\omega_0<1.15$ , aproximadamente; tres equilibrios entre  $1.15<\omega/\omega_0<1.34$  aproximadamente y de nuevo un equilibrio para valores  $\omega/\omega_0>1.34$ .

#### 2.5.1.2. Resultados para $\beta = 4\omega_0$ variando $h_0$

$\omega_0=\pi*500$ ;  
 $d=0.03$ ;  
 $\beta=4\omega_0$ ;  
 $h_0=0.002\omega_0$ ;

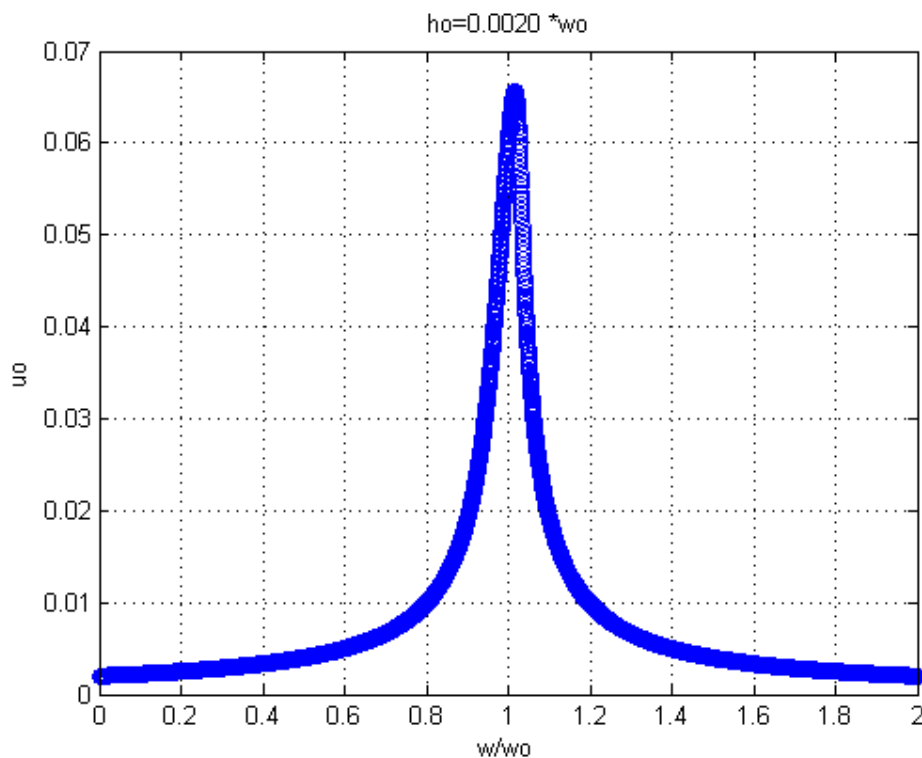


Figura 34. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $h_0=0.002\omega_0$ .

Para campos externos débiles los efectos no lineales son despreciables. No se producen bifurcaciones y la gráfica obtenida tiene forma cuasi-lorenziana, con un pico de amplitud en torno a  $\omega/\omega_0=1$ , es decir en torno a la frecuencia de resonancia ( $\omega=\omega_0$ ). Al alejarse de este valor de frecuencia la amplitud de la órbita estacionaria disminuye rápidamente. En este caso el sistema tendría una solución única, lo que se traduciría en una órbita circular estable para el núcleo del vórtice cuyo valor que reflejado en el eje de ordenadas para cada valor de la frecuencia angular del campo

magnético externo. Como queda claro en la figura, el valor del radio de giro crece rápidamente al acercarse a la frecuencia de resonancia y disminuye su valor de igual forma al alejarse de éste.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= 4\omega_0; \\ \mathbf{h}_0 &= 0.012\omega_0;\end{aligned}$$

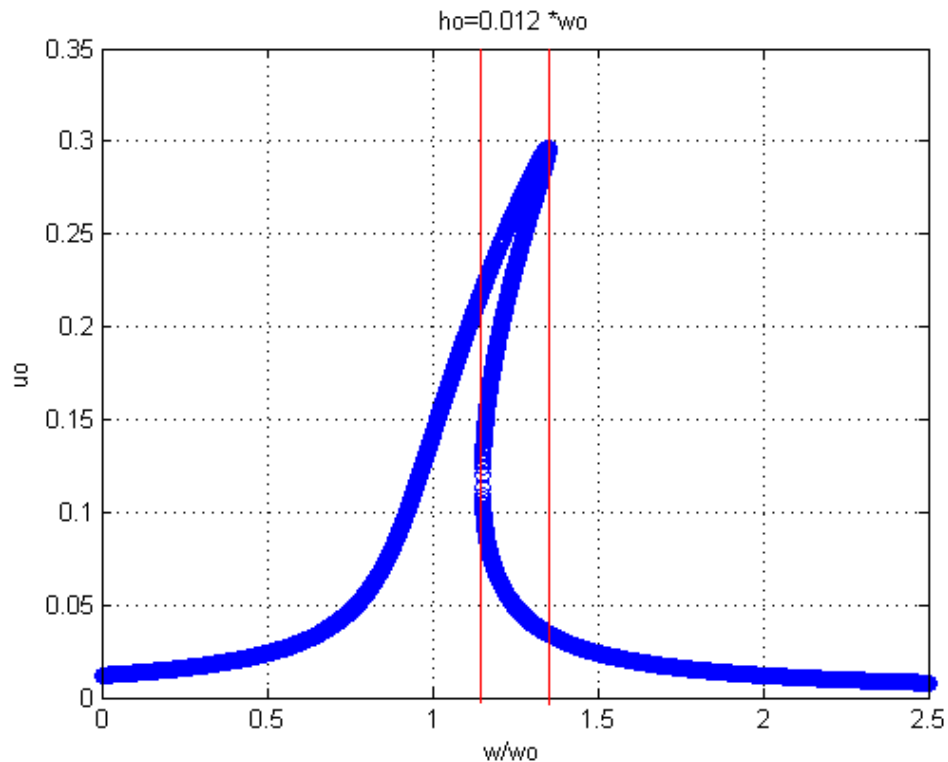


Figura 35. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $h_0 = 0.012\omega_0$ .

Aumentando la intensidad del campo externo los efectos no lineales entran en juego y el comportamiento es completamente distinto al anterior, ya que ahora sí se produce una bifurcación de pliegue. El valor máximo se desplaza hacia la derecha y existen múltiples valores posibles del radio de la trayectoria para un pequeño intervalo en torno al pico de amplitud, concretamente en el intervalo comprendido aproximadamente entre  $1.15 < \omega/\omega_0 < 1.34$ . De esta forma, el sistema tendría un equilibrio único fuera de este intervalo, que se traduciría en una órbita circular estable del núcleo del vórtice. Sólo en dicho intervalo, hay dos órbitas estables y una inestable.

En [4] se describen las observaciones experimentales de la siguiente forma: se observa ahora un proceso de histéresis, el núcleo del vórtice comienza en el centro del *dot* y al aumentar la frecuencia angular del campo magnético externo va aumentando también el radio de giro de su órbita. De esta forma, llega un momento en que la oscilación se hace inestable, cuando la frecuencia angular del campo alcanza el valor delimitado con la línea vertical roja más a la derecha ( $1.34\omega_0$  en la Figura 35), en la cual el radio de giro decae bruscamente para después seguir disminuyendo progresivamente con  $\omega$ . Si a continuación se disminuye la frecuencia angular del campo externo, el radio de la órbita del núcleo del vórtice va aumentando ligeramente y al llegar a la frecuencia angular delimitada con la línea vertical roja más a la izquierda ( $1.15\omega_0$  en la Figura 35) la órbita vuelve a hacerse inestable y aumenta bruscamente pasando a una nueva órbita con amplitud mayor (de 0.1 a 0.23 aproximadamente en la Figura 35). Como vimos este proceso de histéresis también se producía al barrer el valor de la amplitud del campo magnético  $h_0$ .

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= 4\omega_0; \\ h_0 &= 0.03\omega_0;\end{aligned}$$

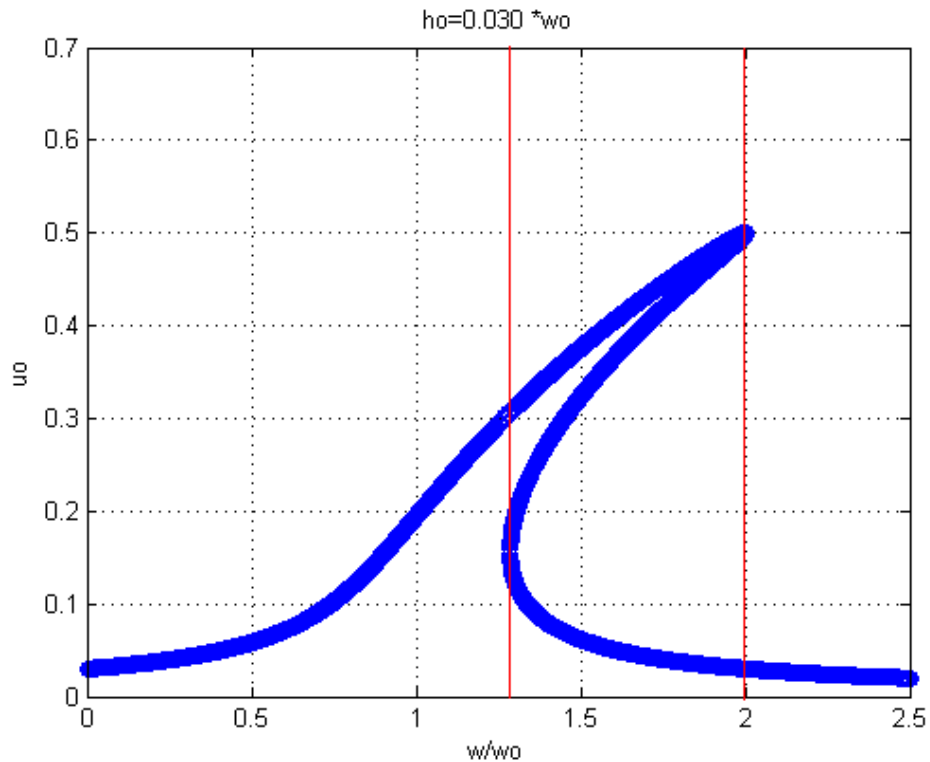


Figura 36. Variación de las soluciones con  $\beta = 4\omega_0$  y  $h_0 = 0.03\omega_0$ .

El comportamiento es muy similar al anterior e incluso más acusado. El desplazamiento del pico a la derecha es aún mayor, así como la zona de la bifurcación de pliegue, que ahora parece ir entre  $1.3 < \omega/\omega_0 < 2$ . Con respecto a la anterior, vemos que la máxima amplitud que alcanza el radio de giro es mayor, llegando a 0.5 frente a los 0.3 del caso de  $h_0 = 0.012\omega_0$ . Queda patente el efecto de aumentar la amplitud del campo magnético externo, ya que comienza generándose una zona de bifurcaciones cerca de la frecuencia de resonancia, que aumenta su longitud en frecuencia al hacerlo el valor de la amplitud del campo magnético externo. Además el valor de la amplitud máxima del radio de giro de la órbita también se incrementa con  $h_0$ .

### **2.5.2. Representación la variación de las raíces del polinomio para $\beta$ negativa**

De nuevo, en primer lugar, se representa la curva que describe cómo varían las soluciones  $u_0$  de la ecuación (35) frente a  $h_0$  para ciertos valores fijos del parámetro  $\omega$ , la frecuencia angular del campo magnético externo aplicado. En las gráficas representadas el eje de abscisas expresa la relación entre  $h_0$  y  $\omega_0$ ; y el eje de ordenadas la amplitud  $u_0$  de la órbita estacionaria del núcleo del vórtice magnético.

Se analiza el comportamiento para un valor de  $\beta$  igual a  $-4\omega_0$ , en este caso. Para este valor de  $\beta$  se varía el valor del parámetro  $\omega$ , dejándolo fijo a  $0.96\omega_0$ ,  $0.9\omega_0$ ,  $0.5\omega_0$  y  $0.05\omega_0$  ahora, generando y analizando las gráficas correspondientes con el programa *roots\_calculation\_vary\_ho.m* (ver apartado 4.1). Como vemos, los valores de frecuencia angular elegidos son menores que la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  ya que se eligen en la zona de interés para  $\beta$  negativa.

Para  $\beta$  negativa también disponemos de la representación de las inecuaciones (42) como herramienta para predecir el número de equilibrios del sistema de acuerdo al análisis realizado en el apartado 2.4. Para saber el número de equilibrios en función de la región para este caso, podemos referirnos a la Figura 28. Representamos esta misma gráfica, junto con líneas horizontales para los valores estudiados de  $\omega$ :

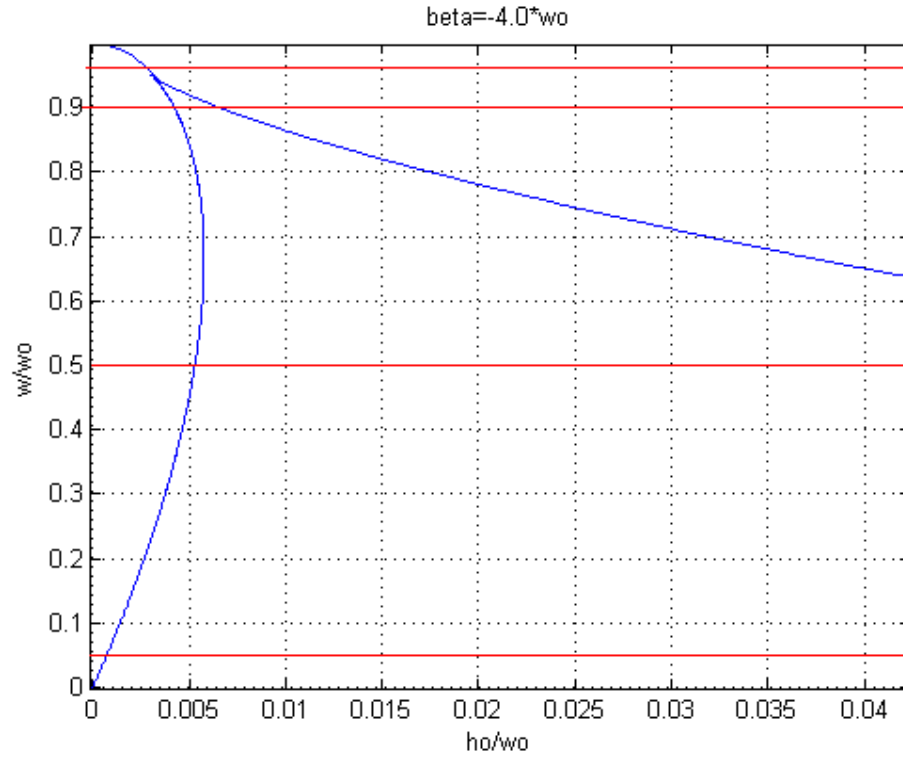


Figura 37. Intervalos delimitados por (42) con  $\beta = -4\omega_0$  y valores  $\omega = 0.05\omega_0$ ,  $\omega = 0.5\omega_0$ ,  $\omega = 0.9\omega_0$  y  $\omega = 0.96\omega_0$ .

Podemos anticipar que habrá tres equilibrios en los casos de  $\omega = 0.05\omega_0$ ,  $\omega = 0.5\omega_0$ ,  $\omega = 0.9\omega_0$  y no así para  $\omega = 0.96\omega_0$  ya que como no entra en la región en la que se cumplen ambas inecuaciones sólo habría un equilibrio en el sistema.



2.5.2.1. Resultados para  $\beta = -4\omega_0$  variando  $\omega$ 

$\omega_0 = \pi * 500;$   
 $d = 0.03;$   
 $\beta = -4\omega_0;$   
 $\omega = 0.96\omega_0;$

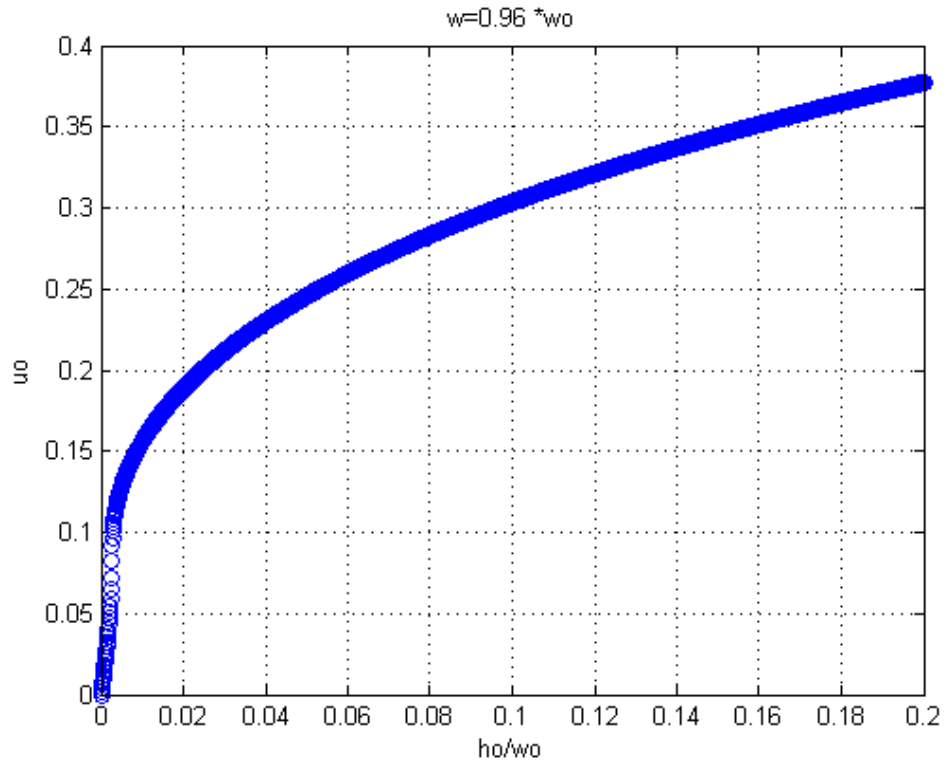


Figura 38. Variación de las soluciones con  $\beta = -4\omega_0$  y  $\omega = 0.96\omega_0$ .

Vemos una gráfica en la que se aprecia claramente la inexistencia de bifurcaciones. El comportamiento cualitativo es muy similar al visto en la Figura 32, donde la relación tiene casi la misma curvatura. El comportamiento cualitativo es análogo al desarrollado en 2.5.1.1 para  $\omega = 1.04\omega_0$ .

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= -4\omega_0; \\ \omega &= 0.9\omega_0;\end{aligned}$$

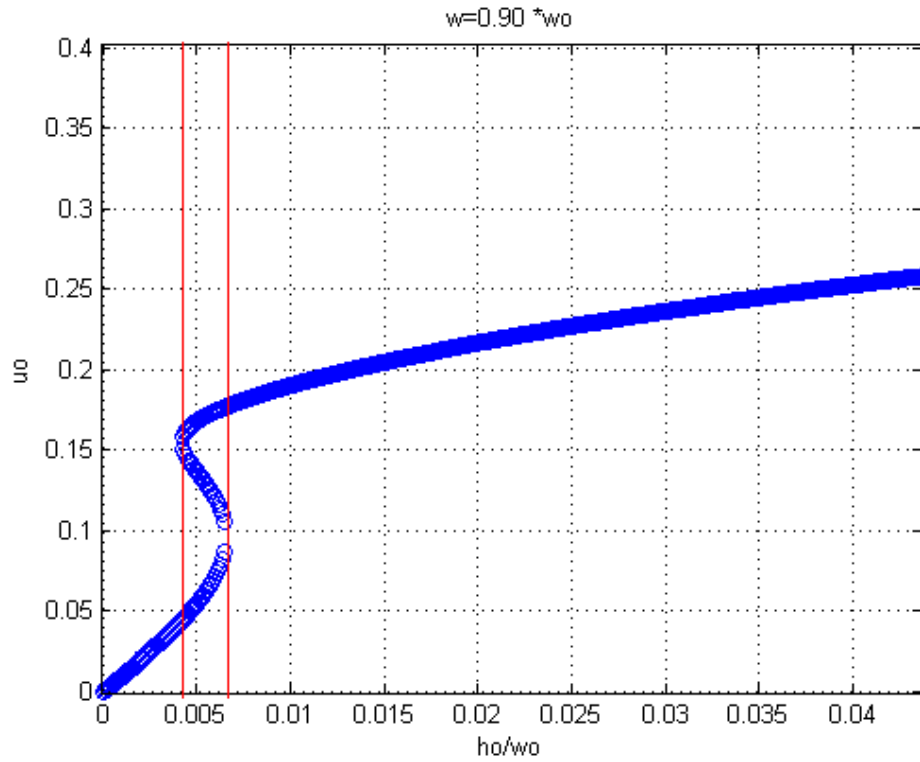


Figura 39. Variación de las soluciones con  $\beta = -4\omega_0$  y  $\omega = 0.9\omega_0$ .

Observamos una evolución similar a la de la Figura 30 y Figura 31, pese a que el valor de  $\beta$  es negativo. Tenemos un intervalo delimitado por las dos líneas rojas verticales en el que existen tres equilibrios simultáneos, que va aproximadamente entre  $(0.004\omega_0, 0.007\omega_0)$ . Fuera de dicho intervalo el sistema presenta un equilibrio único. El comportamiento cualitativo es, por tanto, similar al descrito en el apartado 2.5.1.1 para  $\omega = 1.4\omega_0$  y  $\omega = 1.2\omega_0$ .

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= -4\omega_0; \\ \omega &= 0.5\omega_0;\end{aligned}$$

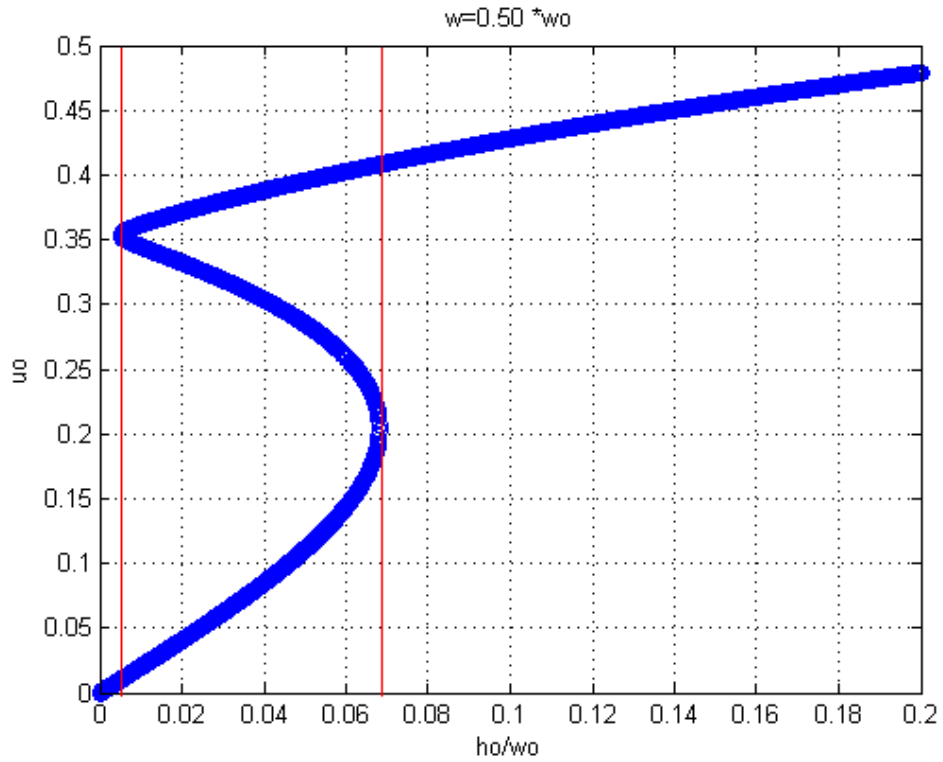


Figura 40. Variación de las soluciones con  $\beta = -4\omega_0$  y  $\omega = 0.5\omega_0$ .

De nuevo tenemos una evolución similar a la de la Figura 30 o a la Figura 34 anterior, pese a que el valor de  $\beta$  es negativo. En este caso el intervalo con tres equilibrios es mayor que en el caso anterior, yendo aproximadamente entre  $(0.007\omega_0, 0.07\omega_0)$ . Fuera de dicho intervalo el sistema presenta un equilibrio único. El comportamiento cualitativo es, por tanto, similar al descrito en el apartado 2.5.1.1 para  $\omega = 1.4\omega_0$  y  $\omega = 1.2\omega_0$ .

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= -4\omega_0; \\ \omega &= 0.05\omega_0;\end{aligned}$$

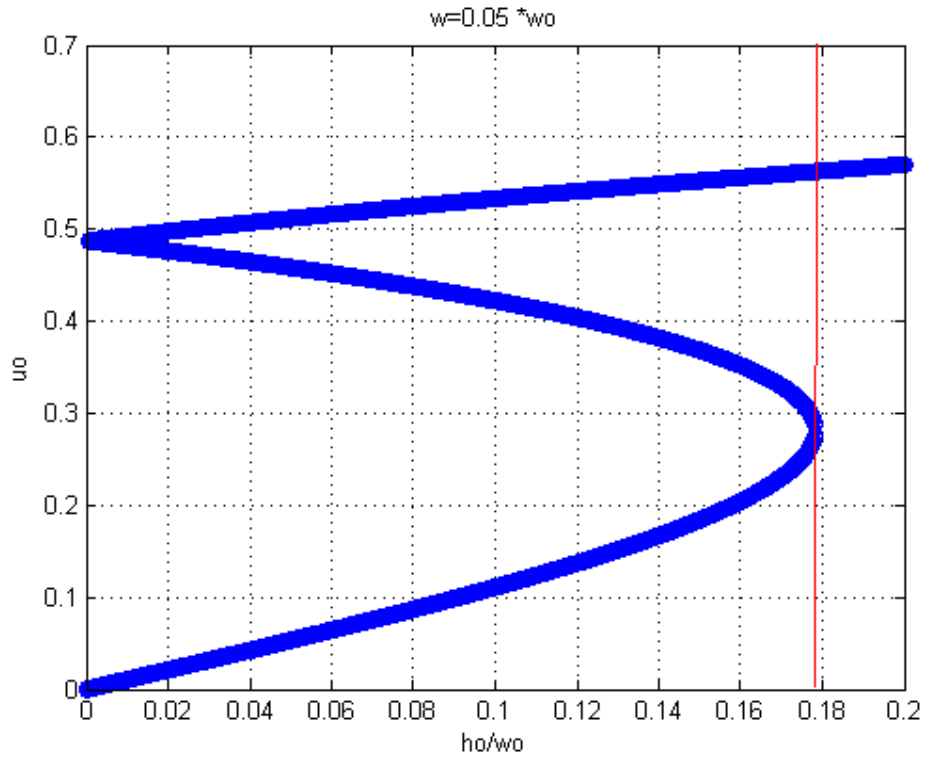


Figura 41. Variación de las soluciones con  $\beta = -4\omega_0$  y  $\omega = 0.05\omega_0$ .

Al disminuir el valor de la frecuencia angular el intervalo con tres equilibrios se extiende aún más, comenzando ahora casi en el origen y llegando hasta casi  $0.18\omega_0$ . Ahora desde una frecuencia angular continua se darían tres equilibrios simultáneamente, aunque luego veremos en el apartado 2.6.2 como ya no siempre serán dos sumideros y un punto de silla, sino que podrán darse un sumidero, una fuente y un punto de silla.

En segundo lugar, se representa la curva que describe cómo varían las soluciones de la ecuación cuando varía el parámetro  $h_0$  que, como recordamos, representa la amplitud del campo magnético externo aplicado al *dot*. En las gráficas representadas el eje de abscisas expresa la relación entre  $h_0$  y  $\omega_0$ , y el eje de ordenadas la amplitud de la órbita estacionaria del núcleo del vórtice magnético.

Se analiza el comportamiento para un valor de  $\beta$  de  $-4\omega_0$ , como ya se hizo en el apartado anterior. Para este valor de  $\beta$  se varía el valor del parámetro  $\omega$ , dejando

fijo  $h_0$  a  $0.002\omega_0$ ,  $0.005\omega_0$  y  $0.02\omega_0$ , generando y analizando las gráficas correspondientes con el programa *roots\_calculation\_vary\_w.m* (ver apartado 4.1.4).

Haremos uso de la representación de las inecuaciones una vez más para conocer el comportamiento esperado del sistema en función de los valores de  $h_0$  y  $\omega$ . Si representamos la gráfica para  $\beta = -4\omega_0$ , junto con líneas verticales para los valores estudiados de  $h_0$ :

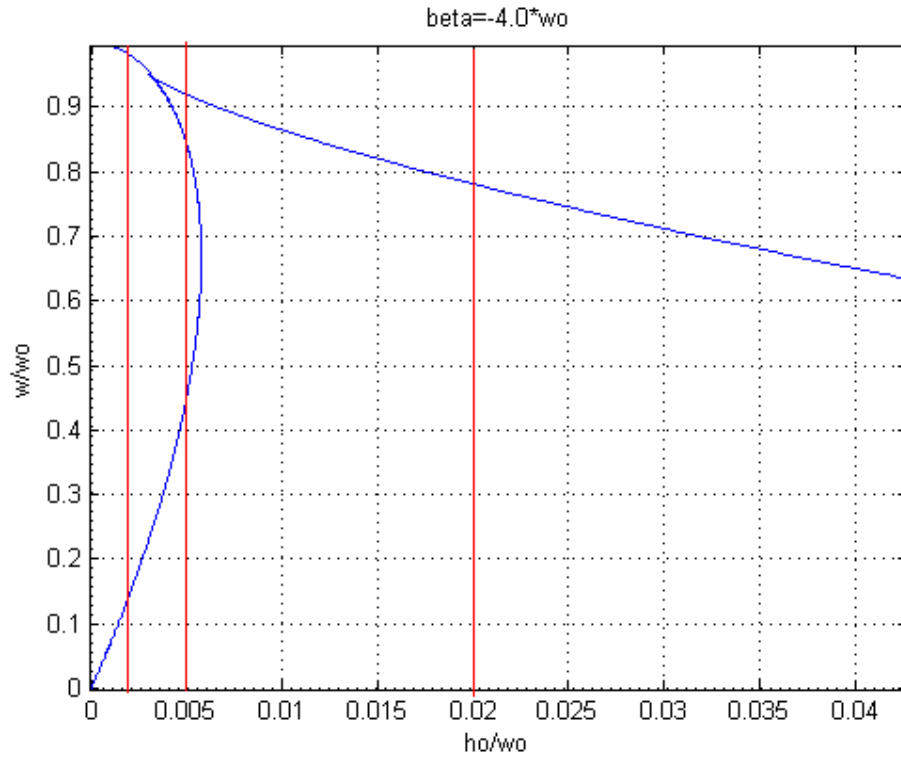


Figura 42. Intervalos delimitados por (42) con  $\beta = -4\omega_0$  y valores  $h_0 = 0.002\omega_0$ ,  $h_0 = 0.005\omega_0$  y  $h_0 = 0.02\omega_0$ .

Ahora prevemos un comportamiento en el que se dará la existencia de intervalos con tres equilibrios, por ejemplo para  $h_0 = 0.012\omega_0$  existirán un intervalo con tres equilibrios: entre  $0 < \omega/\omega_0 < 0.85$ , aproximadamente. También se cumple que para cualquier  $h_0$  mostrado en la figura habrá siempre un intervalo con 3 equilibrios, que comienza en el origen y cuya longitud dependerá del valor de  $\omega$ , que cortará en un punto u otro a la curva que traza el límite superior de la inecuación (42).

2.5.2.2. Resultados para  $\beta = -4\omega_0$  variando  $h_0$ 

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= -4\omega_0; \\ h_0 &= 0.002\omega_0;\end{aligned}$$

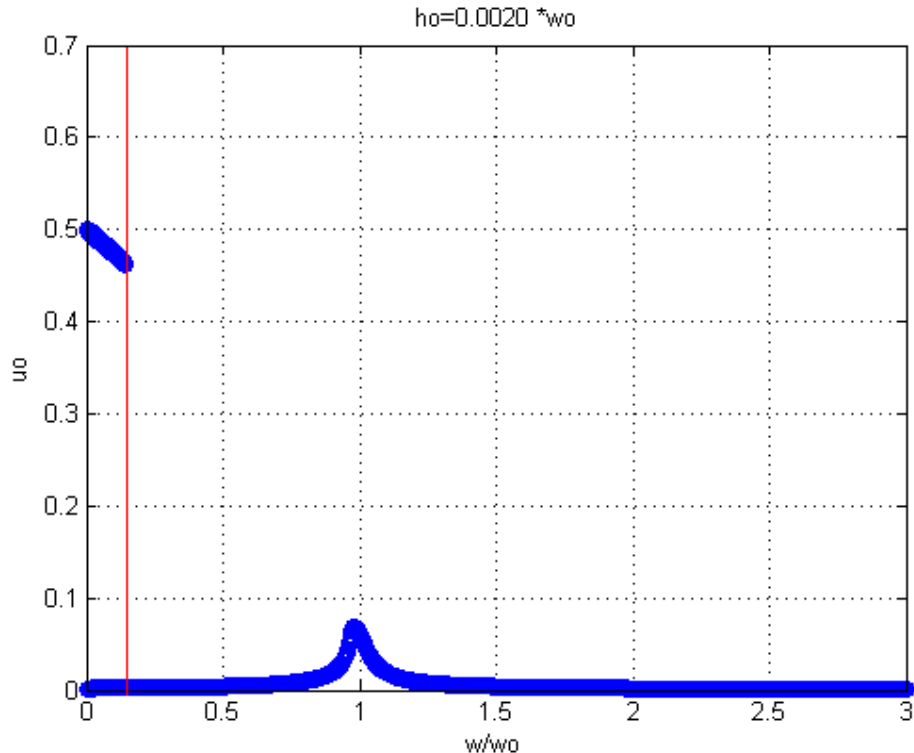


Figura 43. Variación de las soluciones con  $\beta = -4\omega_0$  y  $h_0 = 0.002\omega_0$ .

Vemos una clara diferencia de comportamiento respecto al caso análogo de  $\beta$  positiva (Figura 34). Se produce un pequeño pico en la frecuencia de resonancia como en dicho caso, pero la amplitud es muchísimo menor. Por otro lado se da ahora un fenómeno interesante: hay tres soluciones en torno al origen en el intervalo comprendido aproximadamente entre  $0 < \omega/\omega_0 < 0.1$ , es decir para frecuencias muy bajas. En este intervalo habría una bifurcación que significaría que el vórtice podría estar en tres estados, una órbita estable de radio muy pequeño y otras dos, inestables como veremos, con radio en torno a 0.5. Fuera de dicho intervalo el sistema vendría caracterizado por una única solución estacionaria, i.e. una órbita estable circular con un radio que crece ligeramente al acercarnos a la frecuencia de resonancia y que disminuye a medida que nos alejamos en sentido creciente de  $\omega$ . Los estados inestables desaparecen al sobrepasar la frecuencia un cierto valor.

En la siguiente figura se aprecia el detalle de las soluciones en torno al origen, que en la figura anterior aparentan ser una única línea:

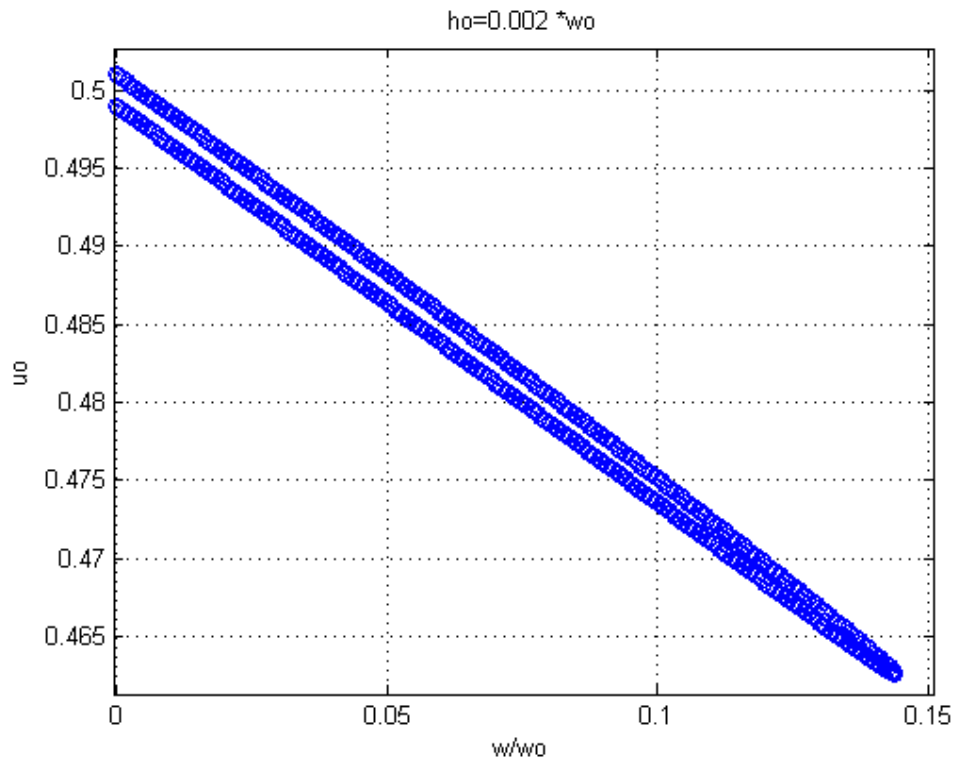


Figura 44. Detalle Figura 43 en torno al origen para las dos ramas de soluciones superiores.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= *500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= -4\omega_0; \\ h_0 &= 0.005\omega_0;\end{aligned}$$

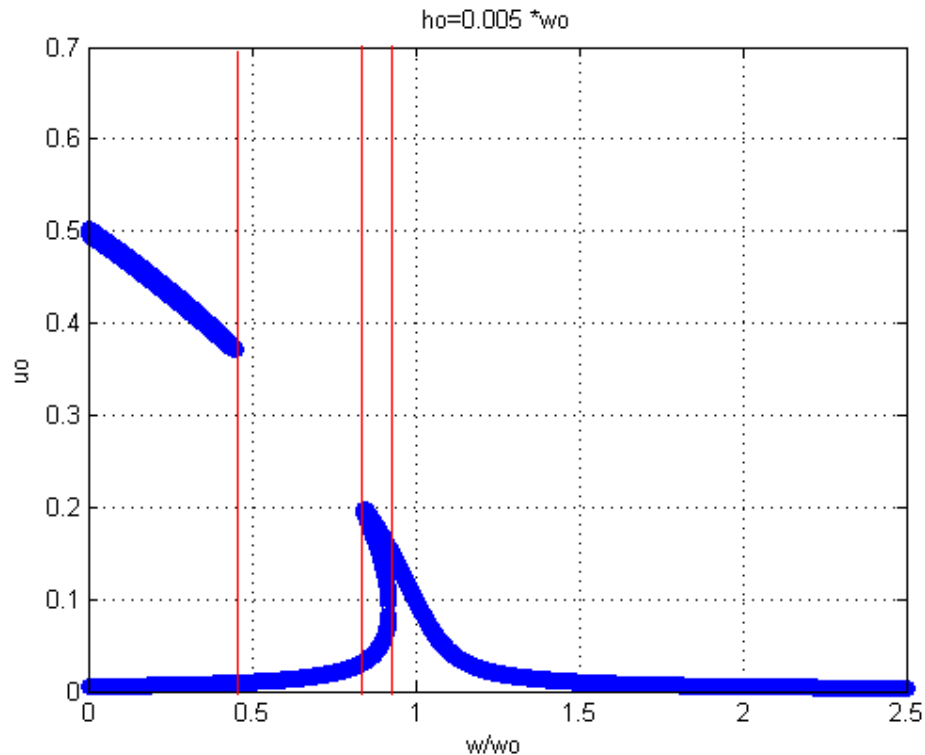


Figura 45. Variación de las soluciones con  $\beta = -4\omega_0$  y  $h_0 = 0.005\omega_0$ .

Vemos ahora cómo las soluciones inestables existen para un rango de frecuencias mayor, aproximadamente desde el origen de frecuencias hasta  $\omega/\omega_0 < 0.45$ . A partir de dicho valor existe una solución única en forma de órbita circular estable cuyo radio crece al aumentar la frecuencia. Existe otro intervalo con tres equilibrios entre  $0.7 < \omega/\omega_0 < 0.9$ , como ya sabíamos que ocurriría a partir de la Figura 42. Además, la resonancia de la órbita estable, como en el caso de  $\beta > 0$ , es esencialmente no lineal y presenta una bifurcación de pliegue. Al aumentar la frecuencia a partir de  $0.45 \omega_0$  hay de nuevo un proceso de histéresis por el que el núcleo del vórtice iría describiendo una órbita circular de radio creciente con la frecuencia, por la rama estable inferior, hasta dar un salto brusco hacia una órbita de mayor radio (0.2) al llegar a  $\omega/\omega_0 = 0.85$ , en la frecuencia marcada por la segunda línea roja vertical. A partir de dicha frecuencia, la rama estable inferior ha desaparecido y el vórtice iría por la rama estable superior de soluciones, el radio de la órbita iría disminuyendo con la frecuencia. Al realizar el proceso inverso, disminuyendo la frecuencia desde frecuencias altas, el sistema iría también por la rama superior de soluciones hasta llegar a  $0.45 \omega_0$ , donde el sistema



daría un salto brusco a la rama inferior de soluciones, disminuyendo bruscamente su radio para después hacerlo progresivamente con la disminución de frecuencia.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \pi * 500; \\ d &= 0.03; \\ \beta &= -4\omega_0; \\ h_0 &= 0.02\omega_0;\end{aligned}$$

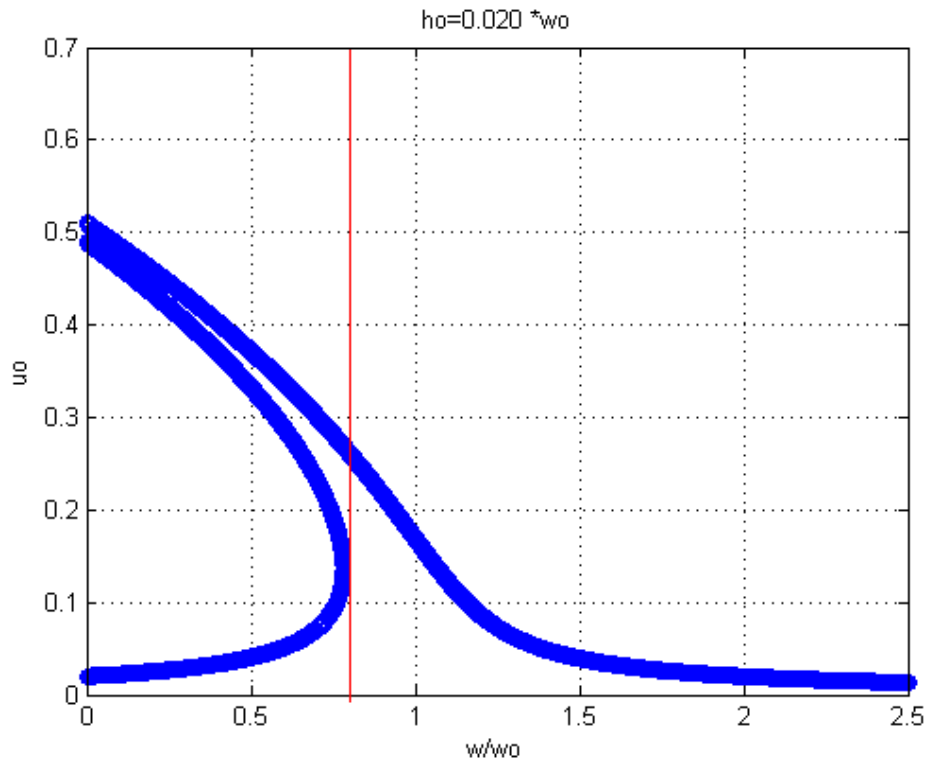


Figura 46. Variación de las soluciones con  $\beta = -4\omega_0$  y  $h_0 = 0.02\omega_0$ .

Con un incremento aún mayor de la intensidad del campo magnético externo aplicado se ve claramente la separación entre las dos líneas de soluciones que forman el pico en el origen, de forma que pueden distinguirse mejor los tres valores posibles del radio para frecuencias bajas (en particular las soluciones con valores más altos en torno a 0.5). El intervalo comprendido aproximadamente entre  $0 < \omega/\omega_0 < 0.8$  es el único en que existen tres equilibrios y a partir de  $\omega/\omega_0 < 0.8$  sólo uno.

Se produce en este caso de nuevo un fenómeno de histéresis, de forma que al aumentar en sentido creciente la frecuencia angular del campo de excitación, el radio de la órbita aumenta progresivamente al movernos sobre la rama inferior de soluciones. Esto sucede hasta alcanzar una frecuencia  $\omega = 0.75\omega_0$ , momento en el que el núcleo del vórtice pasa a una órbita estable para aumentar su radio desde 0.08 a

0.3, pasando a la órbita estable de mayor radio. Desde ese punto en adelante al aumentar la frecuencia el radio irá decreciendo progresivamente. Veremos en la siguiente sección cómo la rama superior corresponde inicialmente a un equilibrio inestable y que, debido a que se produce una *bifurcación de Hopf* [44], pasa a ser estable desde cierta frecuencia.

Al barrer en sentido decreciente de frecuencias el fenómeno sería diferente: el núcleo del vórtice seguiría de nuevo una trayectoria circular cuyo radio iría aumentando hasta llegar a un cierto valor en el cual el equilibrio se desestabiliza, pasando el núcleo del vórtice bruscamente a tener un radio menor, correspondiente al equilibrio de la rama inferior..

## 2.6. El plano de fase del sistema

En esta sección las ecuaciones (28) y (29) han sido representadas con MATLAB, haciendo uso de la función integrada *pplane8* [43]. En las representaciones se ha tomado como referencia para los valores de los distintos parámetros los sugeridos por el tutor, de acuerdo a las simulaciones físicas realizadas en laboratorio por otro de los participantes en el trabajo [4].

La función *pplane8* es una herramienta interactiva para el estudio de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales. Al ejecutar dicho comando se le presenta una ventana al usuario con controles interactivos para realizar la configuración. Se pueden especificar hasta seis parámetros y elegir el tipo de campo y los puntos del mismo a representar.

Una vez configurado, al pulsar el botón correspondiente, se genera la representación gráfica de la solución del sistema con las condiciones iniciales dadas.

En el presente trabajo se ha estudiado el comportamiento del sistema con valores del parámetro  $\beta$  positivos, para poder comparar los resultados obtenidos con los ya mostrados en [4] y con los resultados con beta negativos, originales de este proyecto.

Se han obtenido resultados para unos valores de  $\omega=1.04\omega_0$ ,  $\omega=1.2\omega_0$ ,  $\omega=1.4\omega_0$ ,  $h_0=0.01\omega_0$ ,  $(\omega_0/2\pi)=250$  MHz y un valores de  $\beta$  positiva ( $4\omega_0$ ) y negativa ( $-4\omega_0$ ). Para cada conjunto de valores se han representado las soluciones, mostrándose dos

gráficas similares, en la primera aparecen los vectores de campo y en la segunda aparecen también representadas las ceroclinas (curvas donde se anulan cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema). El eje de abscisas se ha hecho corresponder a  $\Phi$ , mientras que el de ordenadas a  $u$ .

Dado que se trabaja con coordenadas polares, se representan sólo los valores positivos de  $u$ , ya que al ser un radio no tienen sentido físico los valores negativos, y los valores de  $\Phi$  entre  $-\pi$  y  $\pi$ , con lo cual tendríamos una visión completa del comportamiento, pues a partir de estos valores de  $\Phi$  las soluciones serían periódicas cada  $2\pi$ . En la representación de las ceroclinas sí aparecen valores negativos de  $u$ , para facilitar la visión completa de las curvas, aunque hay que recordar que no tendrían sentido físico.

Para cada una de las gráficas se indican los valores del conjunto de parámetros que intervienen (que ya vimos en la Tabla. I):

$\omega_0$ , frecuencia angular de resonancia en Mrad/s  
 $\omega$ , frecuencia angular del campo magnético externo en Mrad/s  
 $d$ , coeficiente de amortiguamiento  
 $\beta$ , constante  
 $h_0$ , amplitud del campo magnético externo aplicado

A continuación, se muestran los gráficos y resultados para dichos valores. La interpretación de un punto  $(\bar{f}, u)$  del plano de fases es que corresponde a un movimiento instantáneo “cuasi-circular” del núcleo del vórtice, de radio  $u$  y desfase  $\phi$ . En cada momento el círculo varía, excepto en una solución de equilibrio (un punto de equilibrio en el plano  $(\bar{f}_0, u_0)$ ) en la cual el núcleo del vórtice recorrería permanentemente el círculo correspondiente con frecuencia angular  $\omega$ , según (26):

$$Z(t) = u_0 e^{i[\omega t + \bar{f}_0]}$$

### 2.6.1 Diagrama de fase y ceroclinas para $\beta = 4\omega_0$

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 250$$

$$\omega = 1.04\omega_0$$

$$d = 0.03$$

$$\beta = 4\omega_0$$

$$h_0 = 0.01\omega_0$$

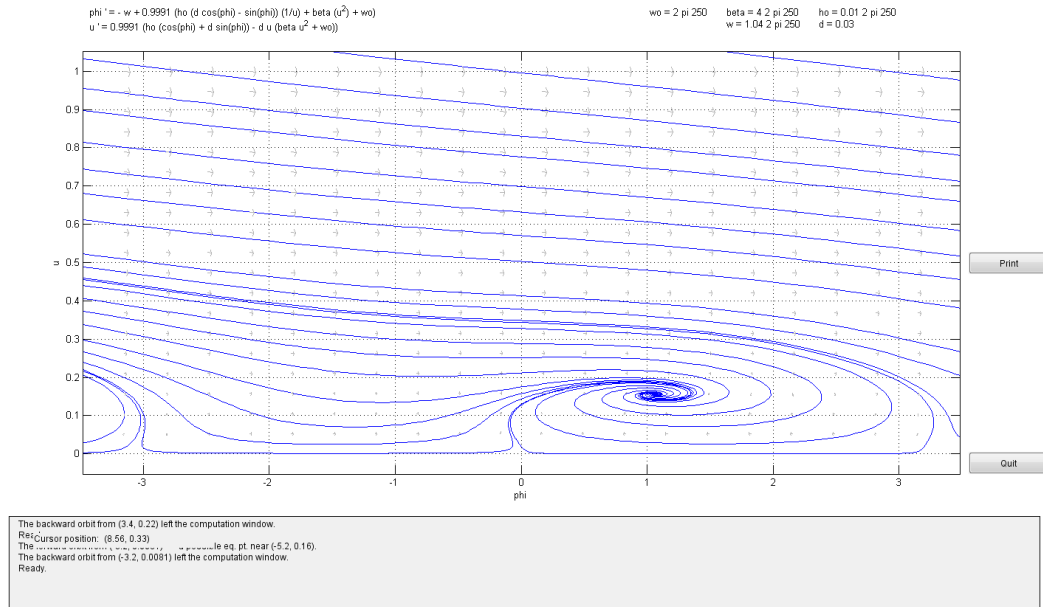


Figura 47. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = 4\omega_0$  y  $\omega = 1.04\omega_0$ .

Vemos en la figura cómo el sistema presenta un único equilibrio, en forma de atractor o sumidero en espiral (ver Figura 8). Está situado en  $(\Phi, u) = (-5.2, 0.14)$  y se repite periódicamente cada  $2\pi$  radianes en el eje de abscisas. El campo evoluciona de forma natural hacia esta solución, de forma que el núcleo del vórtice giraría en una órbita estable con radio  $u = 0.14$  y un desfase de  $-5.2 \pm 2n\pi$  rad ( $n \in \mathbb{Z}$ ) respecto al campo magnético de excitación externo.

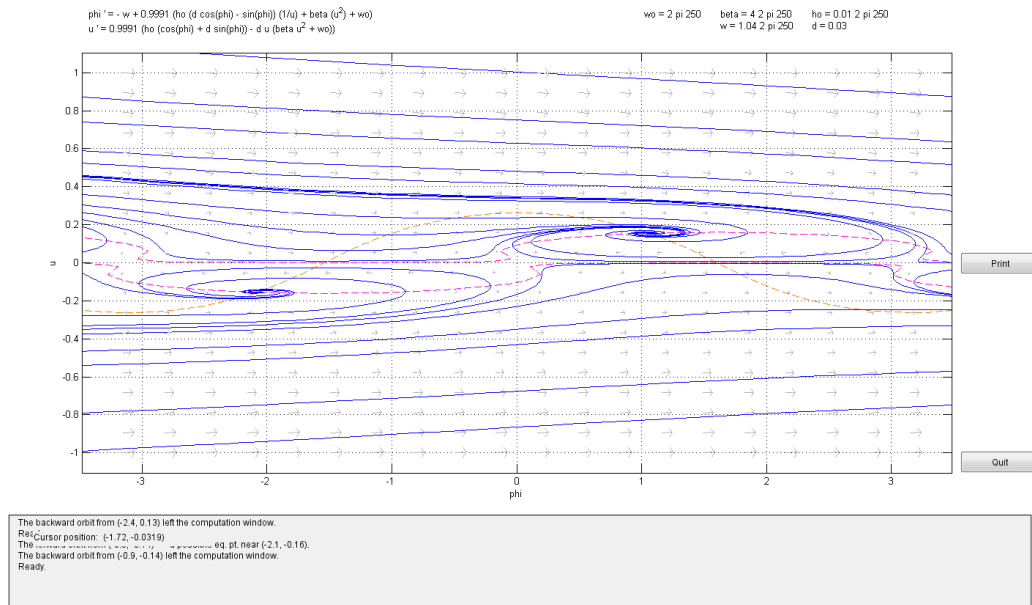


Figura 48. Ceroclinas del sistema con  $\beta=4\omega_0$  y  $\omega=1.04\omega_0$ .

Vemos cómo las ceroclinas separan las zonas en las que el campo tiene distinta dirección y que pasan por los equilibrios del sistema. Hay que tener en cuenta que en la figura se han representado también valores de  $u$  negativos que no tendrían sentido físico, pero que permiten apreciar mejor la forma de las ceroclinas. Se aprecia la existencia de dos ceroclinas, una de color naranja de forma cuasi-senoidal que pasa por los atractores y otras dos en color rosa que delimitan una franja en torno a los atractores en la que el campo cambia de dirección, pasando de apuntar hacia la derecha, en la zona exterior a la franja, a apuntar a la izquierda en dirección al centro del atractor. La ceroclina en color rosa superior pasa por los atractores de  $u$  positiva y la inferior por los de  $u$  negativa.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ \omega &= 1.2\omega_0 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= 4\omega_0 \\ h_0 &= 0.01\omega_0\end{aligned}$$

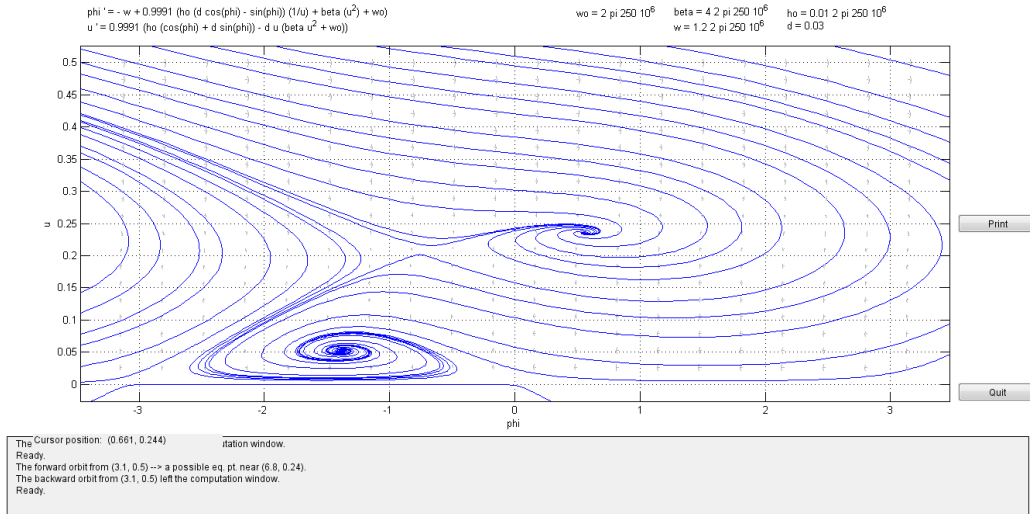


Figura 49. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=4\omega_0$  y  $\omega=1.2\omega_0$ .

Este caso corresponde a uno de los estudiados en [4]. Como puede apreciarse en la figura aparecen dos sumideros o atractores en espiral (ver Figura 8), uno para valores positivos de  $\Phi$ , situado en (0.56, 0.24) y otro para valores negativos, situado en (-1.4, 0.052). Ambos atractores corresponden a soluciones estables que representarían una órbita circular del núcleo del vórtice de radio  $u=0.052$  y desfase respecto al campo magnético externo de  $\Phi=-1.4$  en un caso, y radio  $u=0.24$  y desfase respecto al campo magnético externo de  $\Phi=0.56$  en el otro. Hay una tercera solución en equilibrio inestable en forma de punto de silla (ver Figura 4) aproximadamente en (-0.75, -0.2). El sistema evolucionaría a una de las dos soluciones estables dependiendo de las condiciones iniciales.

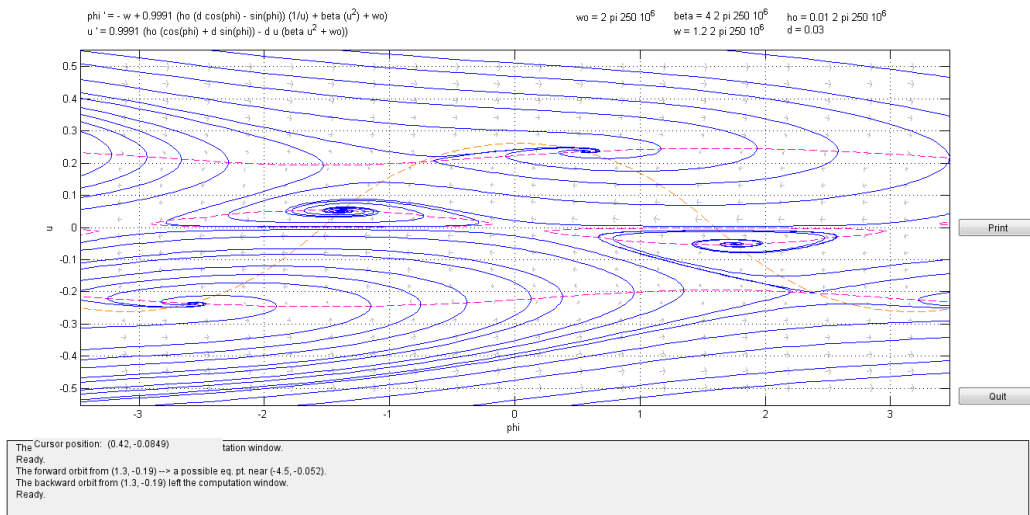


Figura 50. Ceroclinas del sistema con  $\beta=4\omega_0$  y  $\omega=1.2\omega_0$ .

Se aprecian aquí las tres ceroclinas en colores rosa y naranja, superpuestas sobre el gráfico. Una de las trayectorias presenta una forma cuasi-senoidal que pasa por los cuatro atractores (en naranja). Una de las otras (en rosa) delimita una franja en torno a las soluciones más próximas al eje de abscisas, tanto para el atractor de valores de  $u>0$  (valor de  $u=0.052$ ), como para el de valores de  $u<0$ , el cual no tiene sentido físico. La tercera ceroclina también tiene forma cuasi-senoidal, aunque de mucha menor amplitud que el otro, que pasa tanto por el atractor de  $u=0.24$  como por el punto de silla. Observamos que todas las ceroclinas pasan por los equilibrios y que se cortan en los mismos (como ya vimos que debe ocurrir en el apartado 1.2.6).

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ \omega &= 1.4\omega_0 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= 4\omega_0 \\ h_0 &= 0.01\omega_0\end{aligned}$$

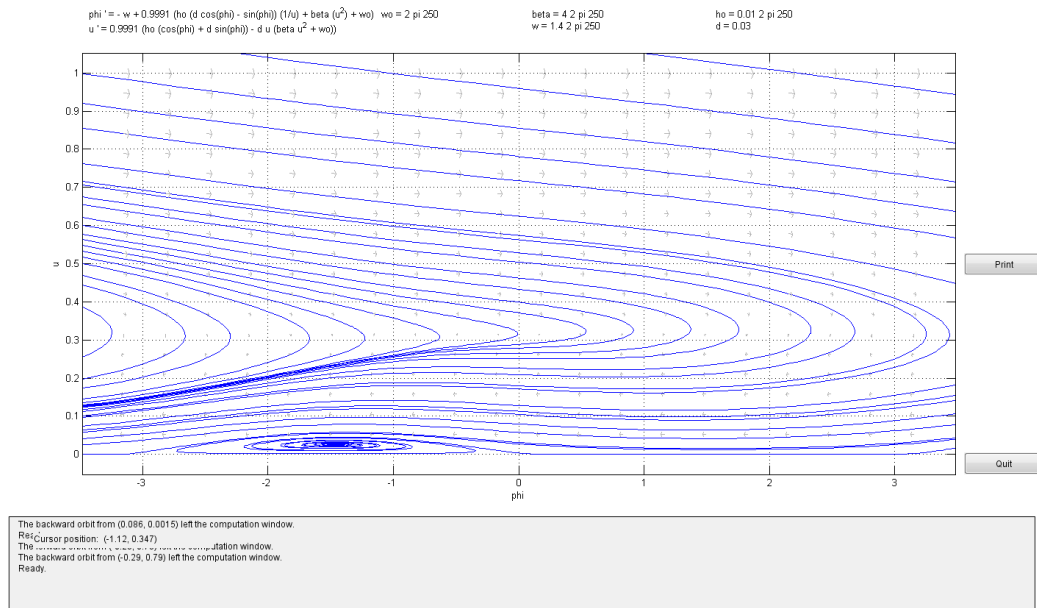


Figura 51. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=4\omega_0$  y  $\omega=1.4\omega_0$ .

Vemos ahora como el sistema presenta un único equilibrio, como ya predecíamos para este caso. Es un atractor en espiral que se repite periódicamente en el eje de abscisas y con un valor de radio pequeño (aproximadamente  $u=0.03$ ) y desfase negativo (aproximadamente  $\phi=-1.5$ ). El comportamiento cualitativo del sistema sería análogo al descrito para el caso de  $\omega=1.04\omega_0$ , i.e. el sistema presentaría una órbita circular estable única con el radio y desfase indicados.



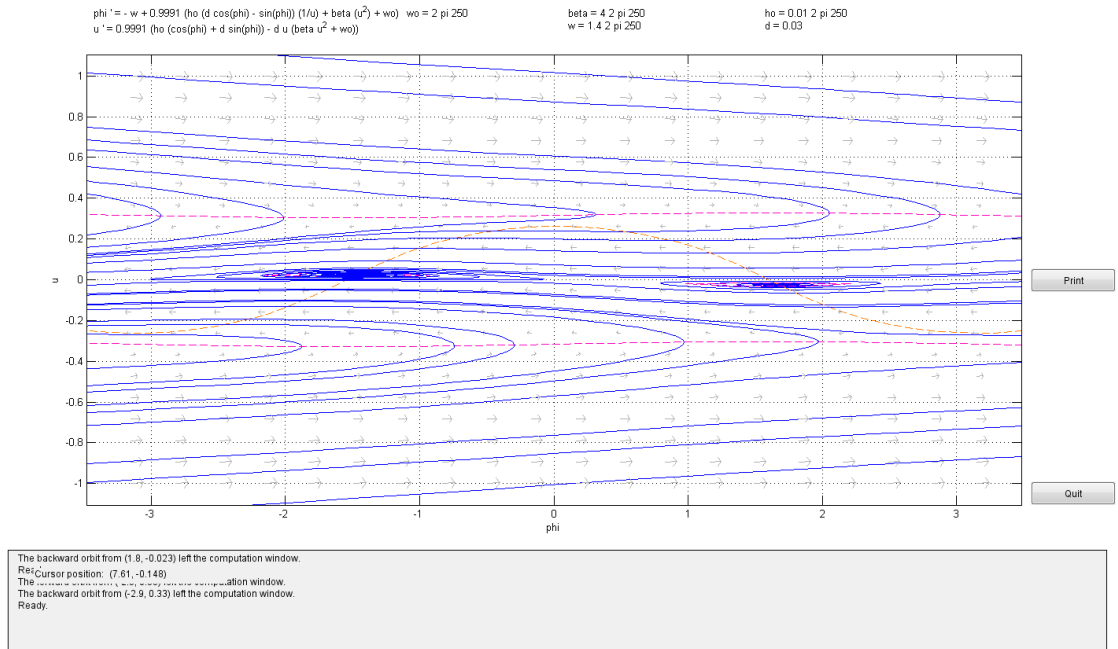


Figura 52. Ceroclinas del sistema con  $\beta=4\omega_0$  y  $\omega=1.4\omega_0$ .

Vemos cómo las ceroclinas presentan un patrón similar al de la Figura 48, si bien la franja que delimitan las dos ceroclinas en color rosa es más amplia que en el caso de  $\omega=1.04\omega_0$  y además las líneas son casi rectas. Una diferencia es la aparición de otra ceroclina en rosa que rodea a los atractores. Comprobamos que las ceroclinas se cortan en los puntos de equilibrio.

En principio las ceroclinas nos aportan la información que hemos recogido, es decir delimitan las regiones en las que el campo apunta en distinto sentido y se cortan en los puntos de equilibrio, pero podemos ver la evolución dinámica con el diagrama de fases para distintos valores de los parámetros del sistema. Es por ello que no serán incluidas en el siguiente sub-apartado.

### 2.6.2 Diagramas de fase para $\beta = -4\omega_0$

Vamos a estudiar a continuación la evolución del sistema dinámico para el caso de  $\beta$  negativo, apoyándonos en la representación de los diagramas de fase para distintos valores de  $h_0$  y  $\omega$ . Los valores son concretamente:  $h_0=0.002\omega_0$ ,  $0.005\omega_0$  y  $0.02\omega_0$  y  $\omega=0.05\omega_0$ ,  $0.5\omega_0$  y  $0.9\omega_0$ .

Podemos prever el comportamiento cualitativo del sistema, apoyándonos en la representación de los diagramas de resonancia, con líneas verticales y horizontales

para los valores mencionados. La intersección de estas líneas nos marcarán la región en la que se encuentra el sistema y el correspondiente número de equilibrios (ver Figura 28).

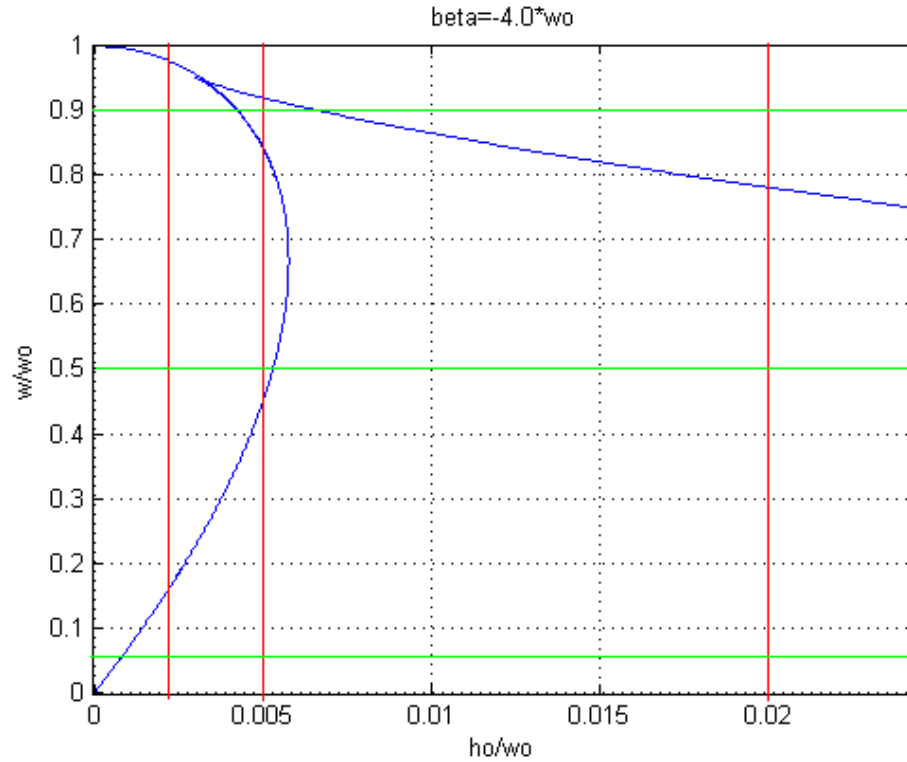


Figura 53. Intervalos y valores estudiados para  $\beta = -4\omega_0$ .

Podemos prever el comportamiento cualitativo en cuanto al número de equilibrios para los nueve casos que vamos a estudiar a continuación:

- Para  $h_0 = 0.002\omega_0$  el sistema pasará de tener tres equilibrios con  $\omega = 0.05\omega_0$  a tener sólo uno en los dos casos siguientes ( $\omega = 0.5\omega_0$  y  $\omega = 0.9\omega_0$ ).
- Para  $h_0 = 0.005\omega_0$  el sistema pasará de tener tres equilibrios con  $\omega = 0.05\omega_0$  para tener sólo uno con  $\omega = 0.5\omega_0$  y de nuevo tres con  $\omega = 0.9\omega_0$ . Este caso será especialmente interesante.
- Para  $h_0 = 0.02\omega_0$  el sistema pasará de tener tres equilibrios en los dos primeros casos (con  $\omega = 0.05\omega_0$  y  $\omega = 0.5\omega_0$ ), para tener sólo uno con  $\omega = 0.9\omega_0$ .

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.002\omega_0 \\ \omega &= 0.05\omega_0\end{aligned}$$

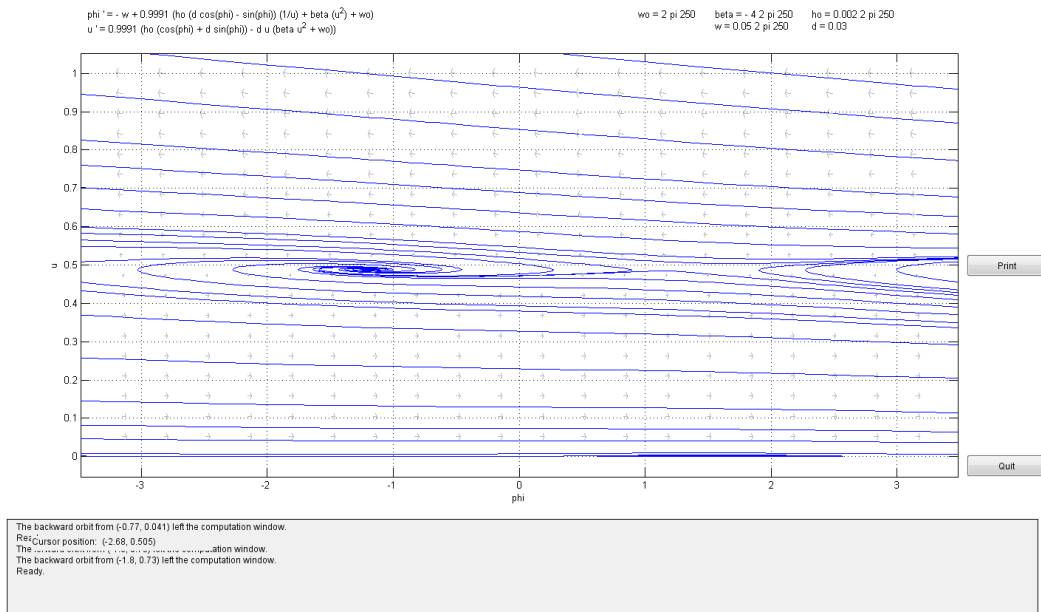


Figura 54. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.05\omega_0$ .

Vemos cómo tenemos tres equilibrios, uno en forma de fuente o repulsor en espiral (ver Figura 8), otro en forma de atractor o sumidero en espiral, estando el primero en  $(-1.3, 0.47)$  y el segundo en  $(1.5, 0.007)$  aproximadamente, así como un punto de silla en  $(1.1, 0.48)$ , como ya preveíamos a partir de la Figura 53. El repulsor tiene mayor radio y desde él salen trayectorias dirigidas hacia el punto de silla, o bien hacia la zona de escape (radios superiores a 0.5) o a la de confinamiento (radios inferiores a 0.5).

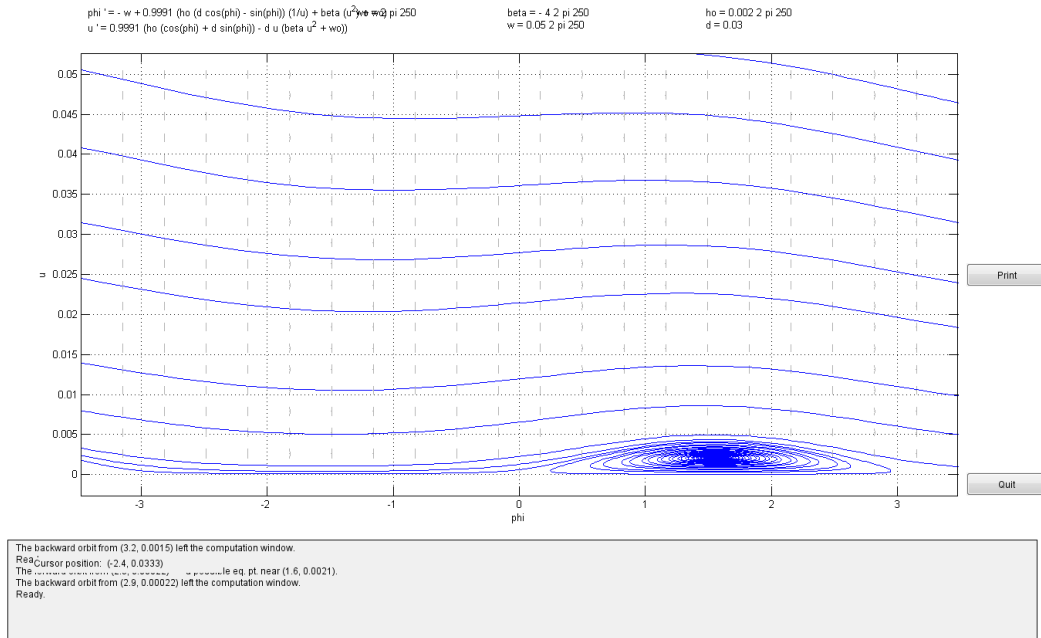


Figura 55. Detalle del atractor de radio pequeño con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.05\omega_0$ .

El sistema convergería este atractor o divergiría hacia la zona de escape, en la que el campo apunta hacia la izquierda, dependiendo de las condiciones iniciales.

Aumentando la frecuencia se observa la creación de una trayectoria periódica que oscila, pasando cerca de los repulsores (de cada periodo) en dirección a los puntos de silla, como se ilustra en la siguiente figura en color rojo, en la que las trayectorias se dibujan en verde para la zona de confinamiento y en azul para la de escape: la trayectoria periódica se crea justamente después de producirse una *conexión silla-silla*, cuando la curva inestable que sale de una silla acaba entrando por la curva estable de una silla contigua (ver Figura 65).

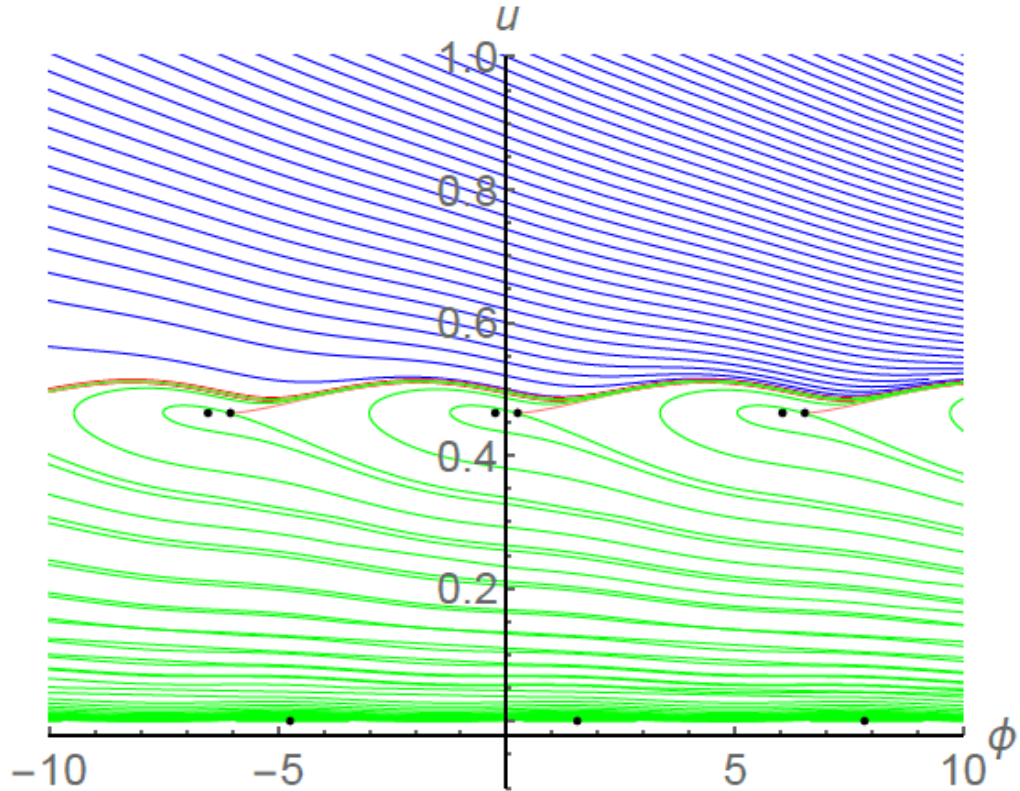


Figura 56. Ejemplo de órbita periódica (en rojo) con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.14\omega_0$ .

Una diferencia clara respecto al caso de  $\beta$  positiva es que el campo apunta en dirección inversa y se crea una zona de escape, hacia valores menores de  $\phi$ , mientras que para  $\beta$  positiva solía hacerlo en sentido creciente de  $\phi$ , sobre todo para valores de  $u$  mayores a 0.5 (lo que se ha convertido en la zona de escape). Además, ahora tenemos una fuente y un sumidero, en lugar de dos sumideros como para  $\beta$  positiva con tres equilibrios.

Iremos desgranando el comportamiento dinámico a medida que veamos los distintos casos (variando  $\omega$  con  $h_0$  fijo y viceversa).

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.002\omega_0 \\ \omega &= 0.5\omega_0\end{aligned}$$

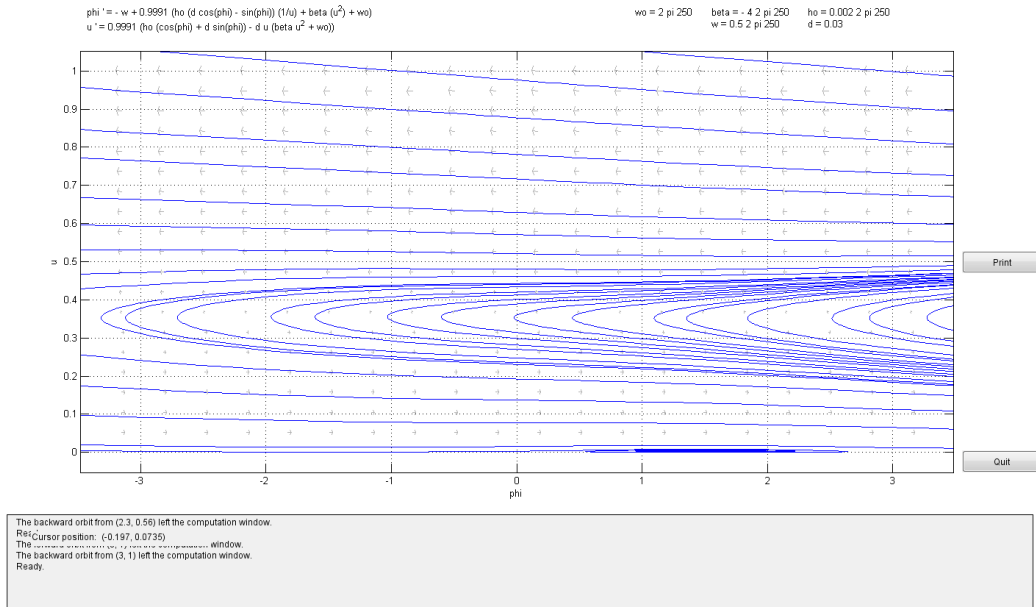


Figura 57. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.5\omega_0$ .

En este caso, vemos cómo solo tenemos un único equilibrio en forma de atractor o sumidero en espiral, situado en el primer cuadrante, que se repetiría periódicamente. El valor del radio resultante en estos atractores es de  $0.004$  y el de  $\phi$  de  $1.5 \pm 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) radianes. Sigue habiendo una órbita periódica más o menos hacia  $u=0.5$ , que juega el papel de frontera entre la zona de escape y la de confinamiento. Las trayectorias van hacia la izquierda por encima de esta frontera, escapándose el vórtice hacia el borde del dot. Por debajo de la frontera hay una convergencia natural hacia el atractor, siendo el sistema estable en esta zona, y el núcleo del vórtice trazaría una órbita circular con el radio y desfase mencionados.

Es decir, al aumentar la frecuencia del campo magnético externo han colisionado el equilibrio con radio mayor y el punto silla que vimos en la Figura 54, desapareciendo ambos. Se ha producido una *bifurcación silla-nodo*.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.002\omega_0 \\ \omega &= 0.9\omega_0\end{aligned}$$

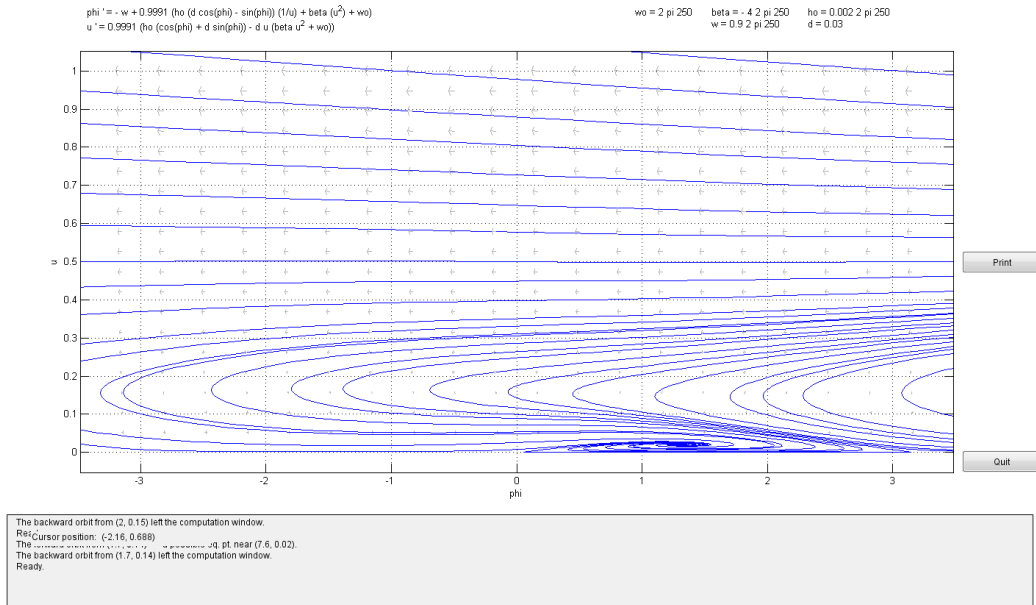


Figura 58. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.9\omega_0$ .

Este caso es análogo al anterior (ver Figura 58), aunque el atractor se encuentra ahora en un radio mayor (0.02). Por lo demás, el comportamiento sería similar al caso de  $\omega = 0.5\omega_0$ , con la salvedad de que las órbitas con radio menor a 0.15 son atraídas con mayor rapidez. Sigue existiendo una órbita periódica que separa la zona superior, de escape, de la zona inferior. En esta última el sistema converge hacia el atractor, es decir, el sistema es estable y el núcleo del vórtice trazaría una órbita circular con el radio y desfase correspondientes al atractor.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.005\omega_0 \\ \omega &= 0.05\omega_0\end{aligned}$$

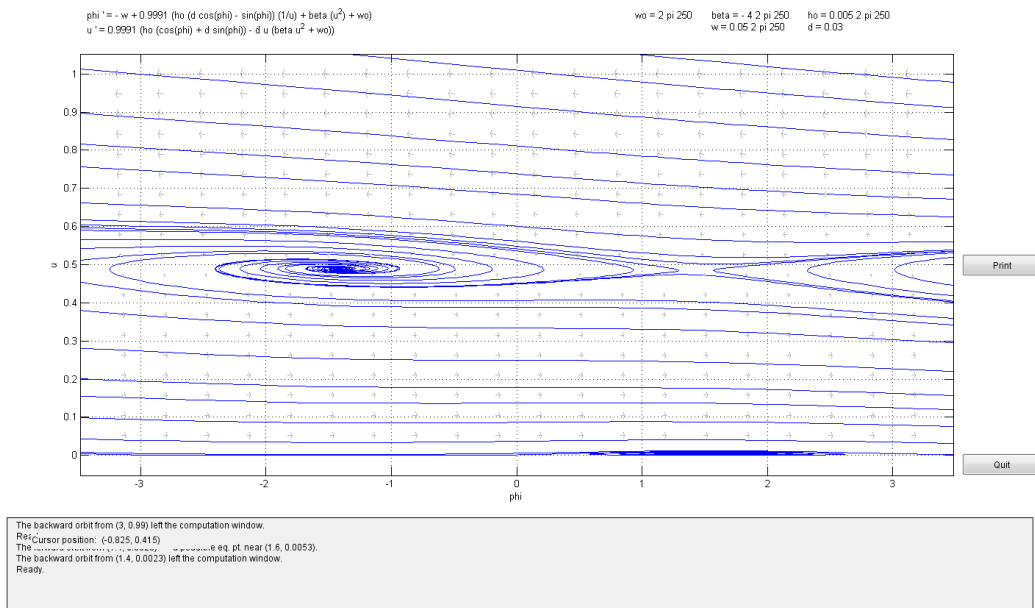


Figura 59. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.005\omega_0$  y  $\omega = 0.05\omega_0$ .

Nos encontramos ahora en una situación parecida al caso de la Figura 54, caracterizado por la existencia de un punto de silla, un repulsor o fuente con radio parecido al anterior y un atractor en espiral (con radio muy pequeño y similar al del caso de  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.05\omega_0$ ). El comportamiento cualitativo del sistema es análogo a dicho caso.



$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.005\omega_0 \\ \omega &= 0.5\omega_0\end{aligned}$$

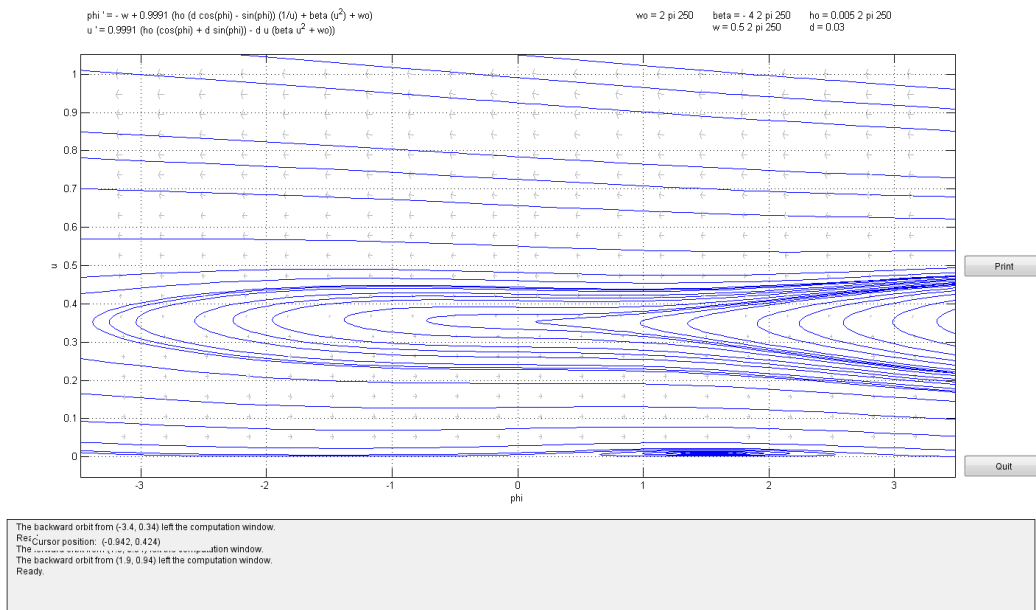


Figura 60. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.005\omega_0$  y  $\omega = 0.5\omega_0$ .

Después de una conexión silla-silla que crea una órbita periódica que separa la zona de escape de la zona de confinamiento, se produce una bifurcación silla-nodo que destruye los dos equilibrios inestables superiores. Ahora el sistema pasa a tener un solo equilibrio en forma de atractor en espiral de radio muy pequeño, en el primer cuadrante. Es un caso similar al descrito para  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.5\omega_0$  (ver Figura 57). De nuevo han desaparecido el equilibrio de radio superior y el punto de silla.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.005\omega_0 \\ \omega &= 0.9\omega_0\end{aligned}$$

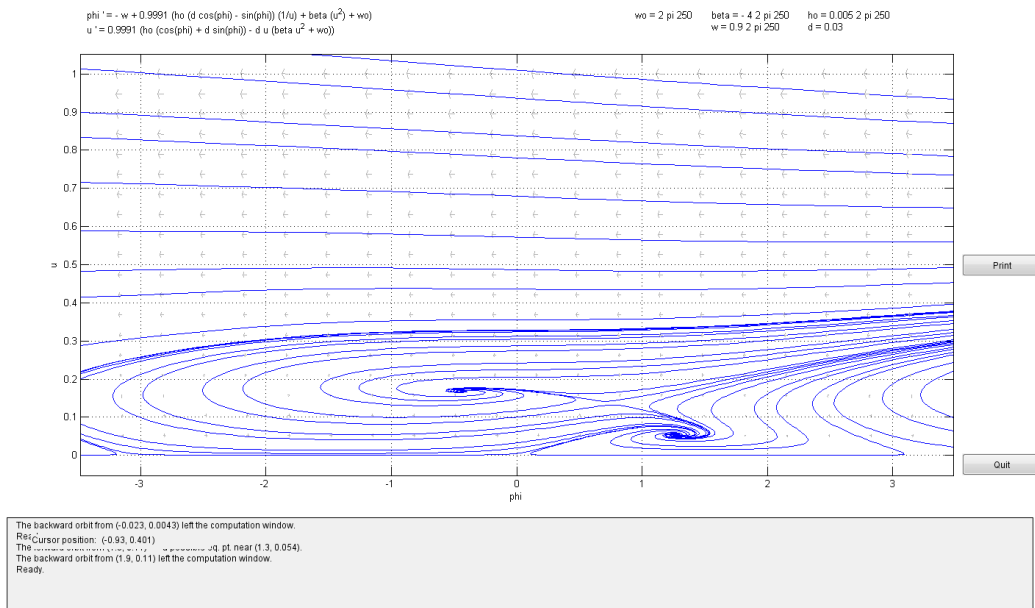


Figura 61. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.005\omega_0$  y  $\omega = 0.9\omega_0$ .

Ahora se ha producido un comportamiento que ya habíamos previsto, el sistema vuelve a tener tres equilibrios, aunque cambia el comportamiento respecto al caso de la Figura 59. Se ha producido una bifurcación silla-nodo que ha creado un sumidero y un punto silla en un radio de aproximadamente 0.17. Ahora tenemos dos sumideros en forma de atractor en espiral (el recientemente creado y el que ya existía en radios bajos) y un punto de silla. El diagrama de fases resultante cambia bastante su aspecto en comparación con los casos de tres equilibrios vistos en la Figura 54 y Figura 59. Ahora los radios de los dos atractores son más parecidos, siendo el del mayor de 0.17 y el de menor de 0.054. El punto de silla se sitúa entre ambos, con un radio de 0.14 aproximadamente. Es un comportamiento parecido al del caso de  $\beta$  positivo con tres equilibrios, habiendo dos atractores y un punto de silla.

Sigue existiendo una zona de escape que se da para valores de radio mayor a 0.5, aproximadamente, y los dos atractores están ahora en la zona de confinamiento. También en este caso la frontera entre la zona de escape y de confinamiento es la trayectoria periódica como la ilustrada en la Figura 56, creada a frecuencias menores por una conexión silla-silla.

Es curioso cómo el sistema pasa sucesivamente de tener tres equilibrios con  $\omega=0.05\omega_0$ , a un solo equilibrio con  $\omega=0.5\omega_0$  y por último tres de nuevo con  $\omega=0.9\omega_0$ , cambiando además el carácter de los equilibrios del sistema.

Los tres del caso de  $\omega=0.05\omega_0$  son un repulsor, un atractor y una silla, y ahora son dos atractores y una silla. Los dos primeros desaparecen colisionando entre sí (la silla y el repulsor) mientras que los dos estables hacen dos bifurcaciones silla-nodo, como en el caso de  $\beta$  positivo. Una para aparecer, y otra para desaparecer, habiendo una bifurcación de pliegue o *folding bifurcation*.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.02\omega_0 \\ \omega &= 0.05\omega_0\end{aligned}$$

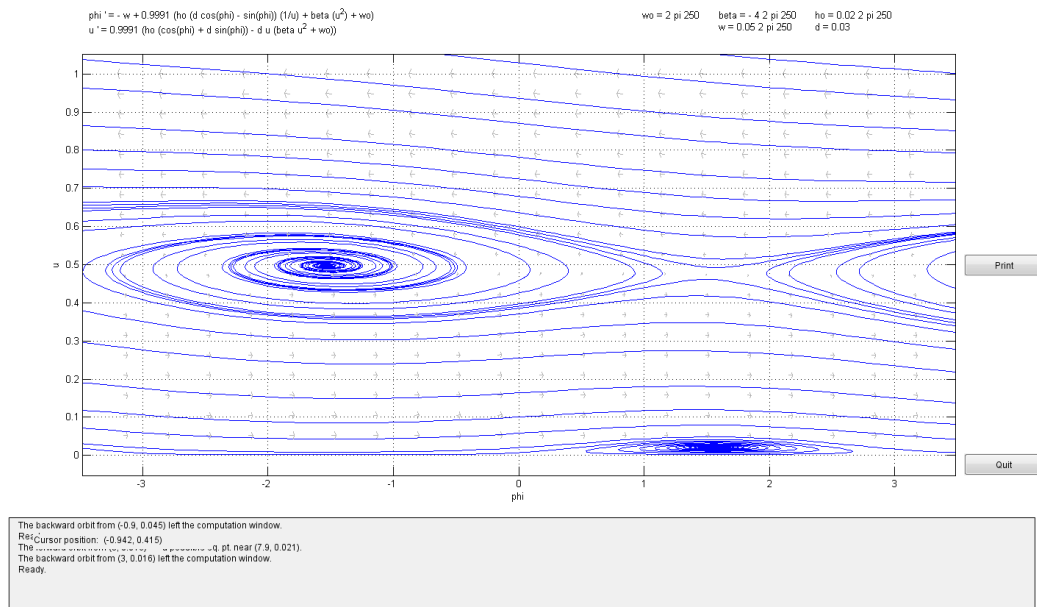


Figura 62. Diagrama de fases del sistema con  $\beta=-4\omega_0$ ,  $h_0=0.02\omega_0$  y  $\omega=0.05\omega_0$ .

Resulta un diagrama de fases que presenta una gran semejanza con el observado en la Figura 54. Como diferencia el equilibrio de menor radio tendría un radio mayor (0.021). El comportamiento del sistema en este momento sería análogo al descrito en dicho caso ( $h_0=0.002\omega_0$  y  $\omega=0.05\omega_0$ ).

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.02\omega_0 \\ \omega &= 0.5\omega_0\end{aligned}$$

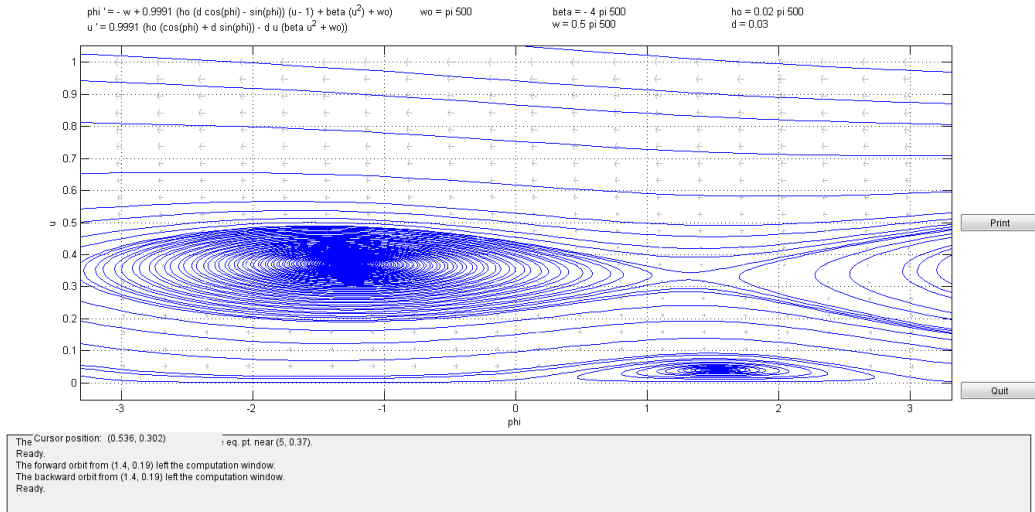


Figura 63. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.02\omega_0$  y  $\omega = 0.5\omega_0$ .

Se aprecia cómo el sistema tiene tres equilibrios también en este caso, como ya sabíamos. Corresponde a un repulsor en espiral situado en  $(-1.3, 0.37)$ , otro en  $(1.5, 0.041)$  y un punto de silla en  $(1.32, 0.32)$ . Al ir aumentando la frecuencia, inicialmente el comportamiento es análogo al descrito para el caso de  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.05\omega_0$ : se produce una conexión silla-silla que crea una trayectoria periódica que separa la zona de escape y la de confinamiento. La curva inestable superior de las sillas, que ha producido la conexión silla-silla, al aumentar la frecuencia rodea el foco inestable, cayendo al foco estable inferior. Esta es la situación de la Figura 63, en el que esa curva inestable rodea al foco inestable y casi vuelve a la silla de nuevo, para caer hacia la derecha y terminar, después de oscilar muchas veces, en un foco estable lejano a la derecha. Todas las trayectorias que salen del foco inestable “se cuelan” por el estrecho pasillo que hay entre la curva inestable y la silla para caer en los sumideros inferiores.

Sucedan, con estos valores de  $h_0$ , al aumentar la frecuencia, una serie de fenómenos que son difíciles de captar con diagramas de fase. Un poco más de frecuencia y la curva inestable acaba cayendo en la silla de la que emergió, formando un lazo alrededor del foco inestable. Este lazo se denomina *trayectoria homoclínica* [40], y produce una bifurcación homoclínica, ya que al aumentar la frecuencia algo más, expulsa una trayectoria periódica que rodea al foco inestable. La curva inestable cae en espiral hacia esa órbita periódica desde fuera, mientras que las trayectorias que salen del foco inestable llegan asintóticamente a la curva periódica desde el interior.

Aumentando la frecuencia, la órbita periódica que rodea el foco inestable se hace cada vez más pequeña, acercándose al foco hasta que para un valor crítico de la frecuencia, es absorbida por él. Es la denominada *bifurcación de Hopf* [44]. A partir de esta frecuencia crítica, el foco inestable pasa a ser estable, y la situación es que hay este nuevo foco estable de mayor radio, la silla y el foco estable de menor radio de

antes. Finalmente, la silla cae sobre el foco de menor radio y ambos desaparecen en una bifurcación silla-nodo.

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 250$$

$$d = 0.03$$

$$\beta = -4\omega_0$$

$$h_0 = 0.02\omega_0$$

$$\omega = 0.9\omega_0$$

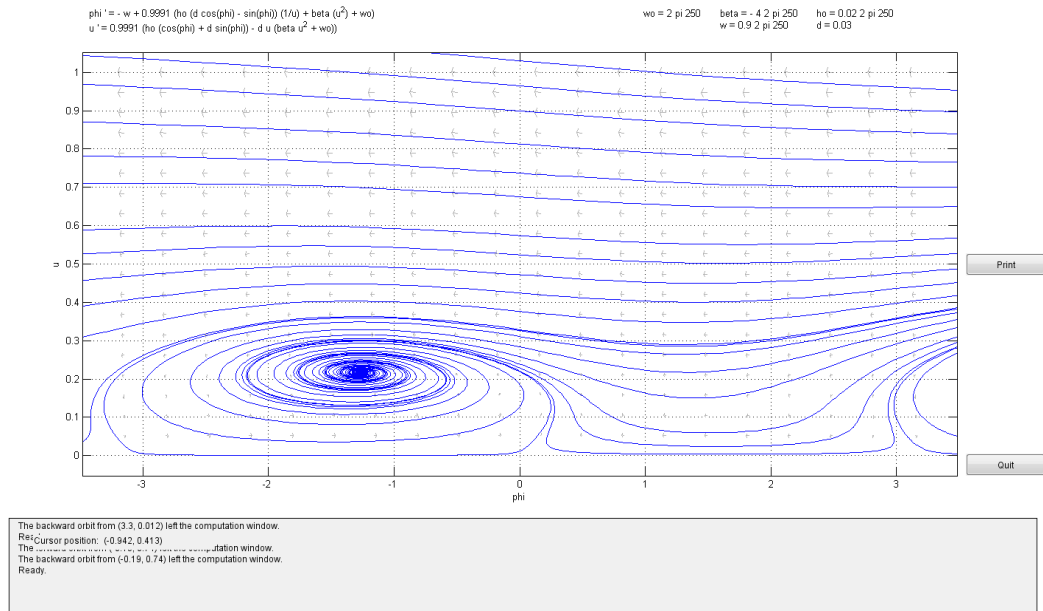


Figura 64. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.02\omega_0$  y  $\omega = 0.9\omega_0$ .

En este diagrama vemos el estado del sistema ya con un solo equilibrio, un sumidero en espiral con un radio aproximadamente igual a 0.23 y desfase -1.2. El núcleo del vórtice presentaría una órbita circular estable con el radio y desfase respecto al campo mencionados. La zona de escape sigue existiendo, separada de la zona de confinamiento por la trayectoria periódica creada a frecuencias mucho más bajas por la conexión silla-silla.

Ilustremos un caso particular de especial interés en el que se produce la conexión silla-silla.

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi \cdot 250 \\ d &= 0.03 \\ \beta &= -4\omega_0 \\ h_0 &= 0.002\omega_0 \\ \omega &= 0.102145\omega_0\end{aligned}$$

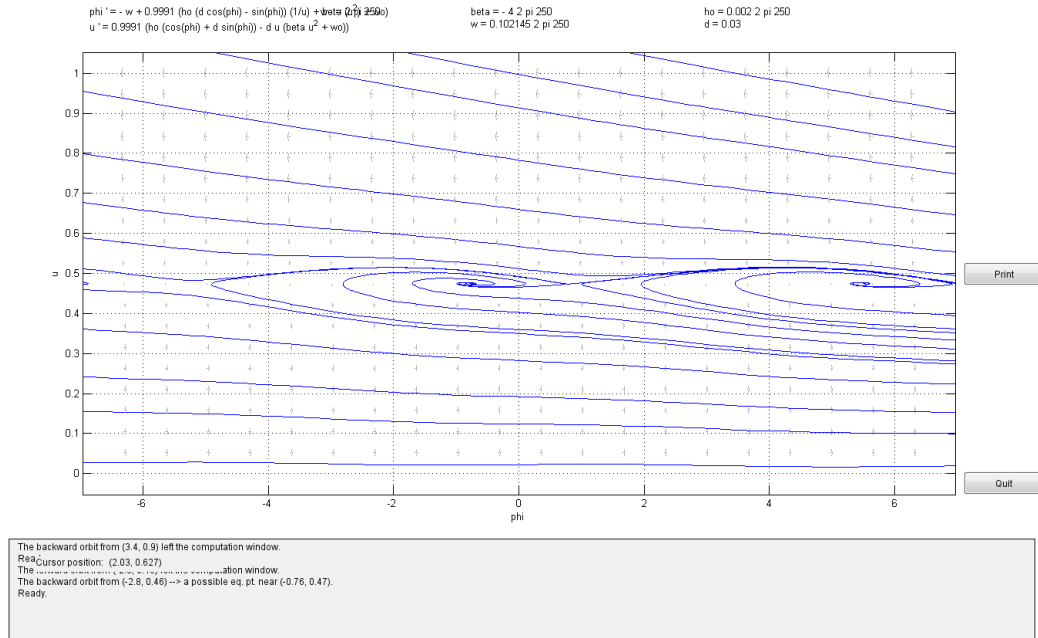


Figura 65. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.002\omega_0$  y  $\omega = 0.102145\omega_0$ .

Este caso ilustra cuando se produce la conexión silla-silla, en una trayectoria que en la figura parte de un valor ligeramente superior a 0.5 en el extremo izquierdo. Esta trayectoria va de la silla a la izquierda del repulsor a la silla de su derecha y así sucesivamente. El sistema tiene un tres equilibrios en este caso, un repulsor, un punto de silla y un atractor con radio tan pequeño que es inapreciable en la figura. Para una frecuencia  $\omega_c$  menor que la primera frecuencia de resonancia las zonas de escape y confinamiento cambian de forma curiosa. Por debajo de  $\omega_c$  las curvas inestables del punto de silla superior crecen de forma asintótica hacia infinito. Cuando  $\omega$  se acerca a  $\omega_c$  desde debajo, las curvas comienzan a oscilar en una zona muy cercana al límite de las regiones de escape y confinamiento, antes de acabar subiendo. Pero en  $\omega_c$  estas curvas inestables terminan exactamente como curvas estables del punto de silla vecino. En esto consiste la conexión silla-silla que vemos en la Figura 65.

Por último representamos también el caso de la bifurcación homoclínica.

$$\omega_0 = 2\pi \cdot 250$$

$$d = 0.03$$

$$\beta = -4\omega_0$$

$$h_0 = 0.02\omega_0$$

$$\omega = 0.85\omega_0$$

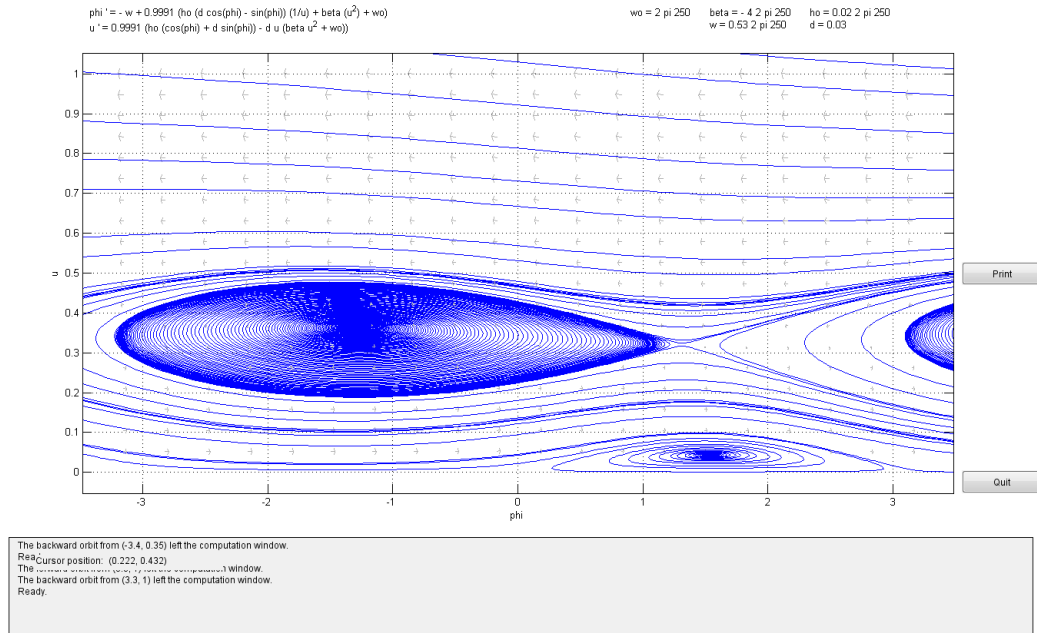


Figura 66. Diagrama de fases del sistema con  $\beta = -4\omega_0$ ,  $h_0 = 0.02\omega_0$  y  $\omega = 0.53\omega_0$ .

Vemos la figura el caso en que se ha producido la bifurcación homoclínica. Al aumentar el campo la rama de la silla (ver Figura 46) sigue cerrándose, hasta llegar a la rama inferior de la silla de la que había salido, rodeando el foco inestable y estabilizándolo, en cierto modo. Es una conexión homoclínica.

# **3**

## **Resumen y conclusiones**



Durante el presente proyecto se ha estudiado el comportamiento dinámico del núcleo de un vórtice magnético en un *dot* (estructura litografiada a escala nanoscópica), sometido a un campo magnético oscilante externo caracterizado por su frecuencia angular ( $\omega$ ) y su amplitud ( $h_0$ ). Para ello se ha utilizado el modelo en forma de sistema de ecuaciones no lineales (27) presentado en la referencia [4].

El sistema es un oscilador no lineal que, a intensidades bajas del campo externo  $h_0$ , se comporta como un oscilador amortiguado lineal: después de un transitorio de unos nanosegundos, el vórtice sigue una trayectoria circular alrededor del centro del dot oscilando a la misma frecuencia que el campo externo. La amplitud de esta oscilación, es decir, el radio de la trayectoria circular, obedece una ley lorentziana, con un pico alrededor de una frecuencia  $\omega_0$  de resonancia intrínseca del sistema. Sin embargo, con intensidades del campo externo mayores, los efectos no lineales se manifiestan.

La no linealidad se incluye en la energía del sistema mediante un término cuártico proporcional a una constante que denominamos  $\beta$ . El caso de  $\beta$  positiva se ha estudiado analíticamente en [4], existiendo resultados experimentales como los citados en esa referencia. Existen resultados recientes [45] que sugieren que para desplazamientos grandes del vórtice  $\beta$  puede ser negativa. Este mecanismo explicaría la tendencia del vórtice a escapar del dot cuando está alejado del centro del dot. En este proyecto se ha descrito el caso de  $\beta$  positiva como precedente del estudio del caso de  $\beta$  negativa, siendo este último el objeto de estudio original de este trabajo.

Los efectos no lineales sobre el sistema oscilante que nos ocupa se reflejan en la aparición, para frecuencias e intensidades de campo más elevadas, de dos órbitas estacionarias circulares del vórtice de radio distinto, tanto en el caso de  $\beta$  positiva como negativa. Con una intensidad de campo fija, las órbitas aparecen y desaparecen al variar la frecuencia. A frecuencias muy bajas o muy altas la situación es similar a la lineal: sólo existe una órbita estacionaria.

Los mecanismos matemáticos por los cuales el modelo explica los efectos no lineales se encuadran en la teoría de osciladores no lineales y de bifurcaciones, y en nuestro modelo encontramos una variedad sorprendentemente amplia de fenómenos. Al variar los parámetros  $h_0$  y  $\omega$  se pasa de la situación lineal a la no lineal mediante una bifurcación de pliegue (una combinación de dos bifurcaciones silla-nodo) en el caso de  $\beta$  positiva.

En el caso de  $\beta$  negativa, el potencial cuártico es negativo, es decir, para radios del núcleo del vórtice grandes hay una repulsión que lo aleja del centro del dot. Se crean en el dot una zona de escape y una zona de confinamiento, ya que a radios menores es la parte cuadrática (y positiva) del potencial la que domina. En la frontera entre estas zonas, a campos y frecuencias pequeñas aparecen algunos equilibrios inestables. Trabajando en el espacio de fase de las coordenadas del núcleo del vórtice en coordenadas polares, pero en un sistema de referencia que rota con la frecuencia del campo externo  $\omega$ , un punto de equilibrio corresponde a una trayectoria circular del núcleo del vórtice con frecuencia  $\omega$  y radio y desfase respecto al campo externo fijos. Los equilibrios estables aparecen como focos estables, y los inestables, en concreto los mencionados antes situados en la frontera entre zonas, aparecen como un foco inestable y una silla por periodo del ángulo polar.

La frontera entre las zonas de escape y confinamiento puede estar compuesta por trayectorias entre los equilibrios inestables o bien por una trayectoria periódica que se crea después de una bifurcación silla-silla. Esta trayectoria periódica es, físicamente, un estado en el que el vórtice gira alrededor del centro del dot con un radio oscilante, y que puede ser un movimiento cuasiperiódico. Cualquier desviación de esta solución de equilibrio “inestable” conduce al vórtice a escaparse o a confinarse dentro del dot. En la zona de confinamiento, para valores adecuados de  $h_0$  y  $\omega$ , existen las dos órbitas estables que se daban en el caso de  $\beta$  positiva. Estas dos órbitas se crean, matemáticamente hablando, mediante una bifurcación de pliegue, como con  $\beta$  positiva, o bien a través de un proceso más complejo: la estabilización del foco inestable a través de una bifurcación de Hopf, en la que una órbita periódica creada desde una bifurcación homoclínica de la silla, colapsa con el foco inestable.

# **4 Código fuente y bibliografía**

## 4.1. Módulos de código MATLAB desarrollados.

Durante la realización del presente Trabajo de Fin de Máster se han desarrollado una serie de módulos en MATLAB:

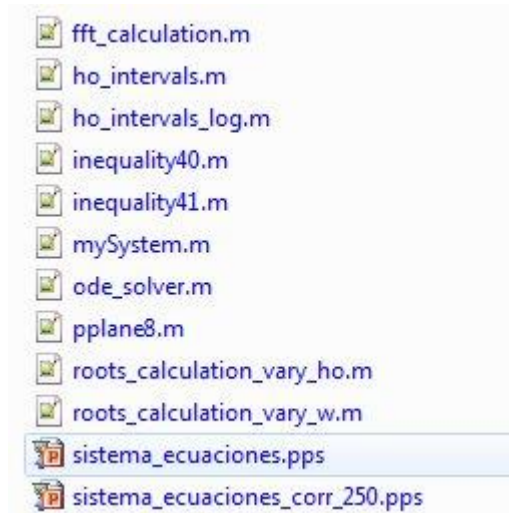


Figura 67. Módulos MATLAB desarrollados.

Estos módulos están escritos en lenguaje de programación M de MATLAB [15], el cual posee amplias y potentes capacidades de manejo de datos matriciales, así como funciones específicas para el tratamiento resolución y visualización de sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales, por lo que son particularmente apropiados en el caso que nos compete.

Los módulos han sido desarrollados para ser independientes entre sí, siguiendo los principios del software modular y simplificar su implementación y comprensión.

Los archivos con extensión pps contienen la representación del sistema de ecuaciones a representar para el programa pplane8.

Pasamos a comentar cada uno de ellos.

### 4.1.1. mySystem.m

Módulo que contiene una función con la representación del sistema de ecuaciones (28) y (29). Tiene como entrada los parámetros necesarios ( $t, y, \omega_0, d, \beta$  y  $\omega$ )

y devuelve un vector columna con cada una de las ecuaciones en una fila. Es llamado por los módulos `ode_solver` y `fft_calculation`.

```
%% Define function representing ODES
function dy = mySystem(t,y,wo,d,beta,ho,w)
% y(1)= phi
% y(2)= u
dy = zeros(2,1); % a column vector
dy(1) = -w+(1/(1+d^2))*(ho*(d*cos(y(1)) -
sin(y(1)))*(1/y(2))+beta*(y(2)^2)+wo);
dy(2) = (1/(1+d^2))*(ho*(cos(y(1))+d*sin(y(1))) -
d*(beta*(y(2)^2)+wo)*y(2));
```

### 4.1.2. ode\_solver.m

Módulo que calcula y representa la solución del sistema definido en `mysystem`, para un vector de condiciones iniciales definido en el propio código. Hace uso del método `ode45` [16] proporcionado por MATLAB para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

```
% ODEs solver

%% Initialization
clc;
clear all;

%% ODE System parameters
wo=pi*500;
d=0.03;
beta=4*wo;
ho=0.03*wo;
w=1.4*wo;

% Interval to be calculated
Tspan = [0 0.2]; % Solve from t=0 to t=0.2

%% System solving and plotting
options=odeset('OutputFcn',@odephas2);
for i=0.01:0.01:0.3
    %Initial conditions
    % y1(0)=pi/2
    % y2(0)=0.1
    IC = [pi/2 i];
    [t,y]=ode45(@mySystem(t,y,wo,d,beta,ho,w),Tspan,IC,options);
    % plot(t,y(:,1),'-',t,y(:,2),'-.');
    grid on;
    xlabel('t');
    hold on;
end
```

### 4.1.3. fft\_calculation.m

Módulo que calcula y representa el módulo al cuadrado del vector del sistema (32) y el espectro en frecuencia, a través del cálculo de la transformada rápida de Fourier (FFT) [17] de las soluciones del sistema. Recordamos brevemente que la FFT es un algoritmo de cálculo numérico que permite obtener una aproximación del espectro en frecuencia de una función temporal dada.

```
% FFT calculation from ODEs solver

%% Initialization
clc;
clear all

%% ODE System parameters
wo=pi*200;
d=0.003;
beta=4*wo;
ho=0.03*wo;
w=1.2*wo;

% Interval to be calculated
Tspan = [0 0.5]; % Solve from t=0 to t=0.5. The resulting spectrum is
very dependent on this time interval!

%% System solving and plotting
options=odeset('OutputFcn',@odephas2);
i=0.01;
%Initial conditions
IC = [pi/2 i];
[t,y]=ode45(@(t,y) mySystem(t,y,wo,d,beta,ho,w),Tspan,IC,options);

%% FFT Calculation
L=length(y);
Fs=2*w/2*pi; % Nyquist theorem: double of bandwidth
NFFT = 2^nextpow2(L); % Next power of 2 from length of y

% Calculate z(t)=u(t)*exp(wt+phi(t))
z = y(2)*exp(1i*(w*t+y(1)));
Z = fft(z,NFFT)/L;
moduleZ = abs(Z).^2;
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1);
omega = f/(2*pi);

%% Plot single-sided amplitude spectrum.
figure;
plot(omega,2*abs(moduleZ(1:NFFT/2+1)));
grid on;
title('Single-Sided Square of Amplitude Spectrum of z(t)');
xlabel('Frequency (rad/s)');
ylabel('|Z(w)|^2');
```

#### 4.1.4. roots\_calculation\_vary\_w.m

Módulo que calcula y representa las soluciones reales del sistema definido por (28) y (29) al variar el valor del parámetro  $\omega$ . Parte de la ecuación (37) en la que se dan los coeficientes del polinomio que determina las soluciones del sistema, cuyos parámetros están recogidos en (38). Cambiando el vector donde se define la variación de este parámetro se obtienen las gráficas correspondientes. Permite ver cómo evolucionan las soluciones cuando cambia  $\omega$ , dejando fijos el resto de parámetros.

```
%% Initialization
clc;
clear all;

%% ODE System parameters
wo=pi*500;
d=0.03;
beta=4*wo;
ho=0.03*wo;

%% Variable w
w=wo*(0:0.002:3)';

%% Polynomial parameters
n=(w-wo)/beta;
m=d*w/beta;
l=ho/beta;

%% Polynomial evaluation / roots extraction
n_size=length(n);
coefs=zeros(n_size,4);
solution.temp=zeros(n_size,3);
for ind=1:n_size
    coefs(ind,:)= [1 -2*(n(ind)) (n(ind))^2+(m(ind))^2 -(l^2)];
    solution.temp(ind,:)=roots(coefs(ind,:));
end

%% Select real solution, i.e. only obtain solution for x=uo^2
[rows,cols]=find((imag(solution.temp)==0));
realvalues=solution.temp(imag(solution.temp)==0);
solution.final=[w(rows)/wo sqrt(realvalues)];

%% Graphical representation
figure;
plot(solution.final(:,1),solution.final(:,2),'o');
axis on;
grid on;
title(sprintf('ho=%.4f *wo', ho/wo));
xlabel('w/wo');
ylabel('uo');
```

### 4.1.5. roots\_calculation\_vary\_ho.m

Módulo que calcula y representa las soluciones reales del sistema definido por (28) y (29) al variar el valor del parámetro  $h_0$ . Parte de la ecuación (37) en la que se dan los coeficientes del polinomio que determina las soluciones del sistema, cuyos parámetros están recogidos en (38). Cambiando el vector donde se define la variación de este parámetro se obtienen las gráficas correspondientes. Permite ver cómo evolucionan las soluciones cuando cambia  $h_0$ , dejando fijos el resto de parámetros.

```
%% Initialization
clc;
clear all;

%% ODE System parameters
wo=pi*500;
d=0.03;
beta=4*wo;
w=1.4*wo;

%% Variable ho
ho=wo*(0:0.0005:0.06)';

%% Polynomial parameters
n=(w-wo)/beta;
m=d*w/beta;
l=ho/beta;

%% Polynomial evaluation / roots extraction
l_size=length(l);
coefs=zeros(l_size,4);
solution.temp=zeros(l_size,3);
for ind=1:l_size
    coefs(ind,:)= [1 -2*n n^2+m^2 -(l(ind))^2];
    solution.temp(ind,:)=roots(coefs(ind,:));
end

%% Select real solutions, i.e. only obtain solutions for x=uo^2
[rows,cols]=find((imag(solution.temp)==0));
realvalues=solution.temp(imag(solution.temp)==0);
solution.final=[ho(rows)/wo sqrt(realvalues)];

%% Graphical representation
figure;
plot(solution.final(:,1),solution.final(:,2),'o');
axis on;
grid on;
title(sprintf('w=%.2f *wo', w/wo));
xlabel('ho/wo');
ylabel('uo');

clear all;
```



### 4.1.6. ho\_intervals.m

Módulo que representa gráficamente las inecuaciones (41) o (42) de forma simultánea para un valor de  $\beta$  determinado. Si  $\beta$  es positivo representa las inecuaciones (41), y si es negativo las inecuaciones (42). En el eje de abscisas la variable es  $h_0/\omega_0$  y en el de ordenadas  $\omega/\omega_0$ . Se extraen los valores reales para la representación para eliminar los valores complejos que se generan al aplicar una raíz cuadrada a valores negativos de las inecuaciones (se dan para valores cercanos a  $\omega_0$ ). En este rango se representa la ecuación (45).

De esta forma se pueden ver los intervalos en los que el sistema tendría uno o tres equilibrios, en función de los valores de  $h_0$  y  $\omega$  para un valor fijo de  $\beta$  y del resto de parámetros. Con estos valores se determina un punto del plano, en el primer cuadrante, en el que puede verse si el sistema cumple ambas inecuaciones simultáneamente (cuando está dentro de la zona comprendida por las dos curvas representadas) o no.

```
%% Program to evaluate and display inequalities 40 and 41
%% Initialization
clc;
clear all;

%% Function System parameters
wo=pi*500;
d=0.03;
beta=-4*wo;

%% Variable w
w=wo*(0:0.001:2)';
nu=(w-wo);

%% Function evaluation
if beta>0
    % Inequality 40. Positive beta
    f_inf=(2/(27*beta))*(nu.*(nu.^2)+9*d^2*(w.^2))-sqrt(((nu.^2)-
3*d^2*(w.^2)).^3));
    f_sup=(2/(27*beta))*(nu.*(nu.^2)+9*d^2*(w.^2))+sqrt(((nu.^2)-
3*d^2*(w.^2)).^3));
    % Equation
    w2=wo*(1:0.001:2)';
else
    % Inequality 41. Negative beta
    f_inf=(2/(27*abs(beta)))*(-nu.*(nu.^2)+9*d^2*(w.^2))-
sqrt(((nu.^2)-3*d^2*(w.^2)).^3));
    f_sup=(2/(27*abs(beta)))*(-
nu.*(nu.^2)+9*d^2*(w.^2))+sqrt(((nu.^2)-3*d^2*(w.^2)).^3));
    % Equation
    w2=wo*(0:0.001:1)';
end
ho_lim=((w2-wo).*(w2.^2)+(d^2)*(w2.^3))*((1+d^2)*(d^2))/beta);
```

```

%% Select real solutions only: ho_inf
realvalues=f_inf(imag(f_inf)==0);
rows=find((imag(f_inf)==0)&((f_inf>0)));
ho_inf=sqrt(realvalues(realvalues>0));

% ho_sup
realvalues=f_sup(imag(f_sup)==0);
rows1=find((imag(f_sup)==0)&((f_sup>0)));
ho_sup=sqrt(realvalues(realvalues>0));

% ho_lim
rows2=find(ho_lim>0);

%% Graphical representation
figure;
plot(sqrt(ho_lim(ho_lim>0))/wo,w2(rows2)/wo);
hold on;
plot(ho_inf/wo,w(rows)/wo);
hold on;
plot(ho_sup/wo,w(rows1)/wo);
%plot(ho_inf/wo,w(rows)/wo,'b',ho_sup/wo,w(rows1)/wo,'g');
axis on;
grid on;
title(sprintf('beta=%.1f*wo', beta/wo));
xlabel('ho/wo');
ylabel('w/wo');

clear all;

```

## 4.2. Referencias bibliográficas

- [1] R. Skomski, J. “Physics: Cond. Matter 15, 841” (2003).
- [2] Tecnun - Universidad de Navarra, “Apuntes sobre materiales magnéticos”:  
[http://www.tecnun.es/asignaturas/PFM\\_Mat/Prog/Matmagv2.pdf](http://www.tecnun.es/asignaturas/PFM_Mat/Prog/Matmagv2.pdf)
- [3] K. Bussmann, G. A. Prinz, S.F. Cheng y D. Wang, “Applied Physics Letters 75, 2476” (1999).
- [4] Konstantin Y. Guslienko, Rafael Hernández Heredero y Oksana Chubykalo-Fesenko “Nonlinear gyrotropic vortex dynamics in ferromagnetic dots”, Physical Review B 82, 014402 (2010).
- [5] Plantilla del Proyecto de Trabajo fin de Máster.
- [6] Normativa de Trabajo Fin de Máster
- [7] Yuri A. Kuznetsov, “Elements of Applied Bifurcation Theory”, Springer-Verlag (1995).
- [8] Artículo sobre sistemas dinámicos de Wikipedia:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical\\_system](http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_system)
- [9] Artículo sobre sistemas dinámicos de Scholarpedia:  
[http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical\\_systems](http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical_systems)
- [10] Edward R. Scheinerman, “Invitation to dynamical systems”, Department of Mathematical Sciences, The Johns Hopkins University.
- [11] D. Rafael Hernández Heredero, “Apuntes de la asignatura Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales: Simetrías y Aplicaciones”, correspondiente al máster en Sistemas y Servicios Accesibles para la Sociedad de la Información.
- [12] Smale, Hirsch and Devaney, “Differential Equations, Dynamical Systems, And an Introduction to Chaos”. McGraw-Hill (2004).
- [13] Página “Paul’s Online Math Notes”:  
<http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/PhasePlane.aspx>

- [14] “A simple guide to chaos and complexity”,  
<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2465602/>
- [15] Página oficial de MATLAB: <http://www.mathworks.es/products/matlab/>
- [16] Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Eibar (Universidad del País Vasco), referencia de ode45 en la página sobre MATLAB:  
[http://www.sc.ehu.es/sbweb/energias-renovables/MATLAB/numerico/diferencial/diferencial\\_1.html](http://www.sc.ehu.es/sbweb/energias-renovables/MATLAB/numerico/diferencial/diferencial_1.html)
- [17] Referencia de la función FFT para MATLAB:  
<http://www.mathworks.es/es/help/matlab/ref/fft.html>
- [18] Qinglei Meng, “Magnetic Vortex” (2008).
- [19] Definición de pared de Bloch en Wikipedia:  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Paredes\\_de\\_Bloch](http://es.wikipedia.org/wiki/Paredes_de_Bloch)
- [20] José Miguel García-Martín, “Dominios magnéticos y técnicas de observación”, Instituto de Microelectrónica de Madrid:  
[http://digital.csic.es/bitstream/10261/45424/1/Dominios\\_CursoVerano\\_JMGarciaMartin.pdf](http://digital.csic.es/bitstream/10261/45424/1/Dominios_CursoVerano_JMGarciaMartin.pdf)
- [21] Página HyperPhysics, “Dominios Magnéticos”:  
<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/solids/ferro.html>
- [22] T.Shinjo et al.,”Science 289,930” (2000).
- [23] S.R.Juárez Wysozka, “Conceptos básicos acerca del espín, helicidad, quiralidad y polarización de una partícula de Dirac”, E56 (2) 197 -206, Revista mexicana de física (2010).
- [24] M.Schneider et al., “Applied Physics Letters 77, 2909” (2000).
- [25] Tecnun - Universidad de Navarra, apuntes sobre “Ferromagnetismo: fundamentos físicos”:  
[http://www.tecnun.es/asignaturas/PFM\\_Mat/Prog/Ferrom.pdf](http://www.tecnun.es/asignaturas/PFM_Mat/Prog/Ferrom.pdf)
- [26] K.McNulty Walsh y Peter Genzer, “Harnessing Magnetic Vortices for Making Nanoscale Antennas”: <http://www.bnl.gov/newsroom/news.php?a=11635>

- [27] D.Kumar, S.Barman y A.Barman, “Magnetic Vortex Based Transistor Operations”, Scientific Reports,4-4108 (2014):  
<http://www.nature.com/srep/2014/140217/srep04108/full/srep04108.html>
- [28] Apuntes de la Universidad Politécnica de Valencia, “Estructura magnética de los materiales. Dominios magnéticos”:  
[http://www.upv.es/materiales/Fcm/Fcm10/pfcm10\\_3\\_2.html](http://www.upv.es/materiales/Fcm/Fcm10/pfcm10_3_2.html)
- [29] Funciones cúbicas en Wikipedia: [http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_function)
- [30] C.Fernández Pérez, F.J.Vázquez Hernández y J.M. Vegas Montaner, “Ecuaciones diferenciales y en diferencias: sistemas dinámicos”:  
<http://books.google.es/books?id=dReLL-V2768C&pg=PA670&lpg=PA670&dq=bifurcaci%C3%B3n+plegada&source=bl&ots=F2lQHalkh9&sig=KB1crH4lyRc-NSY86bpnu1Z606w&hl=es&sa=X&ei=ZLtcVNaEBtLesATVuIGoCg&ved=0CCgQ6AEwAQ#v=onepage&q=bifurcaci%C3%B3n%20plegada&f=false>
- [31] M.Lakshmanan, “The fascinating world of Landau-Lifshitz-Gilbert equation: an overview”, Philosophical Transactions of The Royal Society:  
<http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/369/1939/1280.full.pdf>
- [32] A.A.Thiele, “Applied Physics Letters 30, 230” (1973).
- [33] Sebastian Gliga, “Ultrafast Vortex Core Dynamics Investigated by Finite-Element Micromagnetic simulation”, Forschungszentrum Jülich GMBH:  
[http://books.google.es/books?id=P\\_KjVTtWkAC&lpg=PA42&ots=BilanSeDHx&dq=thiele%20equation%20vortex&hl=es&pg=PP5#v=onepage&q=thiele%20equation%20vortex&f=false](http://books.google.es/books?id=P_KjVTtWkAC&lpg=PA42&ots=BilanSeDHx&dq=thiele%20equation%20vortex&hl=es&pg=PP5#v=onepage&q=thiele%20equation%20vortex&f=false)
- [34] Franz G. Mertens y A.R.Bishop, “Dynamics of Vortices in Two-Dimensional Magnets” (1999).
- [35] K.Yu. Guslienko, B.A. Ivanov, V.Novosad, H. shima, Y. Otani y K. Fukamichi, “Journal of Applied Physics Letters 91, 8037” (2002).
- [36] K.S.Buchanan, M. Grimsditch, F.Y.Fradin, S.D. Bader y V.Novosaf, “Phisical Review Letters 99, 267201” (2007).
- [37] Curva lorentziana en Wolfram:  
<http://mathworld.wolfram.com/LorentzianFunction.html>

- [38] K.S. Lee y S.K.Kim, "Applied Physics Letters 91, 132511" (2007).
- [39] K.S.Buchanan, P.E. Roy, M.Grimsditch, F.Y.FRadin, K.Y.Gusliencko, S.D.Bader y V.Novosad, "Phys. Rev. B 74, 064404" (2006).
- [40] Artículo Homoclinic bifurcation en Wikipedia:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Homoclinic\\_bifurcation](https://en.wikipedia.org/wiki/Homoclinic_bifurcation).
- [41] Lev Davidovich Landau, "Electrodinámica de los medios continuos", Ed. Reverté.
- [42] K.Yu.Gusliencko et al., "Physics Review Letters 96, 067205" (2006).
- [43] John C. Polking, Rice University, "PPLANE8. Phase Plane of an Ordinary Differential Equation:  
[http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m\\_src/pplane8/pplane8.html](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/m_src/pplane8/pplane8.html)
- [44] Apuntes sobre bifurcaciones, Universidad de Zaragoza:  
<http://fmc.unizar.es/people/juanjo/sc/caos/NL8.pdf>
- [45] "A. Lyberatos, S. Komineas, and N. Papanicolaou, Processing vortices and antivortices in ferromagnetic Elements", Journal of applied physics 109, 2 Article Number: 023911 ( 2011 ).